

Fragenkatalog Physik 1

Teil 1

Physikalische Grundgrößen

Mechanik: Kinematik und Dynamik

Kinematik ist die Beschreibung der Bewegung von Körpern in Raum und Zeit.

Dynamik ist die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Bewegung und Kraft.

1. Nennen Sie die sieben Grundgrößen der Physik.

Länge [m], Zeit [s], Masse [kg], Stromstärke [A], Temperatur [K], Stoffmenge [mol], Lichtstärke [cd]

2. Nennen Sie die Grundgrößen der Mechanik.

Grundgrößen der Mechanik: Länge[m], Zeit[s], Masse[kg] $\rightarrow 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$

3. Geben Sie 3 Beispiele skalarer und 3 Beispiele vektorieller physikalischen Größen.

Skalare Größen: Masse, Zeit, Dichte, Temperatur, Länge
Vektorielle Größen: Geschwindigkeit, Kraft, Impuls, Beschleunigung

Koordinatensysteme

1. Rechnen Sie die kartesischen Koordinaten (x, y) des Punktes P in Polarkoordinaten (r, φ) um.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}$$

2. Rechnen Sie die kartesischen Koordinaten (x, y, z) des Punktes P in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) um. Machen Sie Skizzen, in denen der Punkt P in den jeweiligen Koordinaten eingezeichnet ist.

Zylinderkoordinaten

Bei Zylinderkoordinaten werden $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ in ebenen Polarkoordinaten ausgedrückt, $\vec{e}_z$ hingegen bleibt unverändert. Die neuen Basisvektoren sind ortsabhängig ($\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$)

Formeln für Umrechnung:

$$r_x = r_\perp \cdot \cos \phi$$

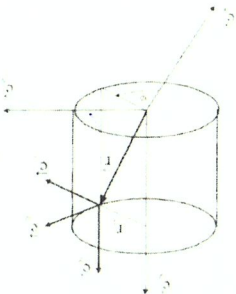
$$r_y = r_\perp \cdot \sin \phi$$

$$r_z = r_z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$



Kinematische Gleichungen. Kreisbewegung, senkrechter, waagrecht, schiefer Fall

1. Erklären Sie das Modell des Massenpunktes. Inwieweit ist das Modell relevant?

- Idealisierter Körper
- Vereinfachte Beschreibung der Bewegung eines Körpers
- Ein Massenpunkt hat keine räumliche Ausdehnung, jedoch aber eine endliche Masse.
- die räumliche Ausdehnung eines Objektes kann durch einen Massenpunkt in dessen Schwerpunkt ersetzt. (Rotation wird vernachlässigt)
- Verwendung: Beschreibung von verschiedenen Kurven (Trajektorien) verwendet werden.
- Es kann verwendet werden, wenn die Ausdehnung des Körpers klein gegenüber den Abständen ist.

Körper mit endlicher Größe: Bewegung = Translation + Rotation

Kartesisch: Quader

Polarkoordinaten (Flächenelement):

$$dA = r \, d\varphi \, dr$$

$$dV = r \, d\varphi \, dr \, dz$$

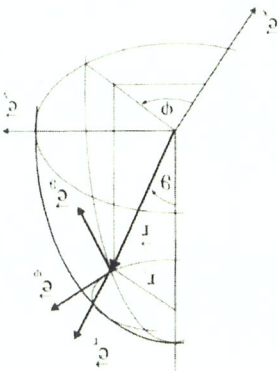
$$dV = r \, d\varphi \, dr \, d\theta$$

Kugel:

4. Stellen Sie die Volumenelemente der kartesischen, polaren und Kugelkoordinaten dar (Formel und Skizze).

3. Was sind die Basis-(Einheits-)vektoren im kartesischen, polaren, zylindrischen und Kugel-Koordinatensystem? Welche sind ortsfest?

- Kartesische Koordinaten: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rightarrow$ ortsunabhängig
- Ebene Polarkoordinaten: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi \rightarrow$ ortsbabhängig
- Zylindrische Koordinaten: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z \rightarrow$ ortsbabhängig
- Kugelkoordinaten: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta \rightarrow$ ortsbabhängig



2. Gleichförmige beschleunigte Bewegung: Für einen Massenpunkt ist die Beschleunigung $\vec{a}$ ($\vec{a} = \text{const}$) gegeben. Berechnen Sie seine Bahnkurve $\vec{r}(t)$. Welche Information ist noch nötig, um die Bewegung des Massenpunktes explizit zu beschreiben.

Ist die Beschleunigung bzw. Geschwindigkeit des Massenpunktes bekannt, so ist seine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch zeitliche Integration bestimmbar. Die Anfangswertbedingungen Geschwindigkeit und Ort müssen zum Zeitpunkt t_0 bekannt sein.

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \text{const.} = \vec{a}_0$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}_0 dt + \vec{v}(t_0) = \vec{a}_0 * (t - t_0) + \vec{v}(t_0)$$

Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt + \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t [\vec{a}_0 * (t - t_0) + \vec{v}(t_0)] dt + \vec{r}(t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}_0}{2} * (t - t_0)^2 + \vec{v}(t_0) * (t - t_0) + \vec{r}(t_0)$$

Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}(t_0 = 0) = \vec{r}_0 \text{ und } \vec{v}(t_0 = 0) = \vec{v}_0$$

Geradlinig gleichförmige Bewegung

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = 0$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \text{const.} = \vec{v}_0$$

Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}_0 dt + \vec{r}(t_0) = \vec{v}_0 * (t - t_0) + \vec{r}(t_0)$$

Geben Sie die Bahnkurve für den schiefen Wurf an. Wie wird sie hergeleitet?

Bei der Bahnkurve für den schiefen Wurf geht man von der Normalform der Bahnkurve aus. Allerdings kann man annehmen, dass der Startpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt ($r_0 = 0$). Die Beschleunigung, die beim Wurf auftritt, entspricht der Erdbeschleunigung $\vec{g}$.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \frac{1}{2}at^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0 \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} r_{0,x} \\ r_{0,y} \\ r_{0,z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Um höchsten Punkt zu berechnen, muss die erste Ableitung = 0 sein. Um Weite zu berechnen X-Koordinaten an Zeitpunkt z_t berechnen.

3. Ein Körper wird unter einem Winkel α schräg nach oben geworfen. Der Betrag der Geschwindigkeit am Anfang sei v_0 . Zeigen Sie, dass die Bahnkurve die Form einer Parabel hat (Berechnung $z(x)$).

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t \\ \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{g}{2} t^2 + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= 0\end{aligned}$$

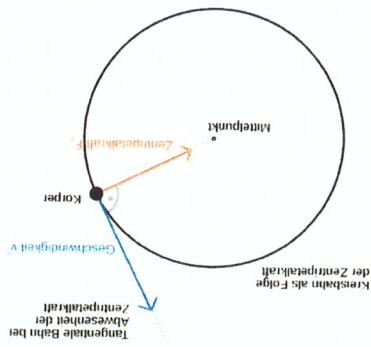
$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t$$

$$\begin{aligned}t &= \frac{v_0 \cos \alpha}{x} \\ z &= -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{x} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{x} \right) \\ z &= -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{x^2} + x \tan \alpha \\ z &= -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{x^2} + \tan \alpha x + 0 \\ z &= \text{const.} * x^2 + \text{const.} x + \text{const.}\end{aligned}$$

$$y = 0 = 0x^2 + 0x + 0$$

In x-Richtung bleibt die Geschwindigkeit konstant.
In y-Richtung (2D) oder z-Richtung (3D) nimmt sie ab (wegen -gt).

4. Definition und Dimension der Zentripetalbeschleunigung. Wo tritt sie auf?



Die Zentripetalkraft (auch Radialkraft) ist die äußere Kraft, die auf einen Körper wirken muss, damit sich dieser im Inertialsystem auf einer gekrümmten Bahn bewegt. Zum Mittelpunkt des Krümmungskreises gerichtet.

$$F_z = -mr\omega^2 * \vec{e}_r [N] = m\vec{a}_z$$

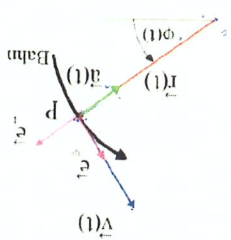
z.B.

- Auto in einer Kurve (würde sonst geradeaus fahren)
- Bewegung Erde um die Sonne
- Elektronen senkrecht in homogenen Magnetfeld → Ablenkung durch Lorentzkraft

Zentripetalbeschleunigung
Zeigt wie die Zentripetalkraft zum Kreismittelpunkt. Sie ist umso größer, je größer $\vec{v}$ ist und je kleiner der Radius ist.

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 * \vec{e}_r [m/s^2]$$

5. Geben Sie die Formeln für die Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren einer ebenen gleichförmigen Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω an. Fertigen Sie ein Diagramm für die Richtungsverhältnisse aller 3 Vektoren an.



$$\begin{aligned} \omega &= \text{const.} = \frac{2\pi}{T} \dots \text{Umlaufzeit} \\ \vec{v} &= \omega r \vec{e}_\phi [m/s] \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a} = -r\omega^2 * \vec{e}_r [m/s^2] \\ |\vec{r}| &= r = \text{const.} [m] \end{aligned}$$

- Winkelgeschwindigkeit:
- Geschwindigkeit:
- Beschleunigung:
- Ortsvektor:

Winkelgeschwindigkeit
Ist eine vektorielle Größe, die angibt, wie schnell sich ein Winkel mit der Zeit um eine Achse ändert. Wird auch als Rotations- oder Drehgeschwindigkeit bezeichnet.

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\omega = \text{const.} = \frac{2\pi}{T} \dots \text{Umlaufzeit}$$

$$\text{Einheit: } \left[\frac{rad}{s} \right]$$

6. Welche Kräfte müssen herrschen, damit sich ein Körper entlang einer Kreisbahn bewegt?

Zentripetalkraft
Die Zentripetalkraft (auch Radialkraft) ist die äußere Kraft, die auf einen Körper wirken muss, damit sich dieser im Inertialsystem auf einer gekrümmten Bahn bewegt. Zum Mittelpunkt des Krümmungskreislaufes gerichtet.

$$F_Z = -mr\omega^2 \cdot \vec{e}_r \text{ [N]}$$

$$\vec{a}_Z = r\omega^2 \cdot \vec{e}_r$$

z.B.

- Auto in einer Kurve (würde sonst geradeaus fahren)
- Bewegung Erde um die Sonne
- Elektronen senkrecht in homogenen Magnetfeld $\rightarrow$ Ablenkung durch Lorentzkraft

Ein Beobachter von außen benötigt zur Erklärung der Kreisbewegung lediglich die Zentripetalkraft. Die Zentrifugalkraft wird nur von demjenigen wahrgenommen, der sich selbst auf einer Kreisbewegung bewegt.

Zentrifugalkraft (Fliehkraft bzw. Scheinkraft)

Ist die Kraft, die nur im rotierenden Bezugssystem erkennbar ist. Sie ist der Zentripetalkraft entgegengerichtet und gleich groß.

Beispiel Karussell:

Durch das Zusammenspiel von Zentripetal- und Zentrifugalkraft entsteht für den Karussellfahrer den Eindruck ruhig zu sitzen.

7. Zeigen Sie, dass bei gleichförmiger Rotation die Zentripetalbeschleunigung zum Zentrum und senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor gerichtet ist.

3 Punkte

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} * \vec{v} &= \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 \omega \sin \omega t \\ r^2 \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \vec{r} * \vec{v} &= -r^2 \omega \cos \omega t * \sin \omega t + r^2 \omega \cos \omega t * \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

Newtonsche Axiome, Masse, Kraft

1. Wie lauten die Newtonschen Axiome. Geben Sie Formeln an und erklären Sie die Bedeutung Die Newtonschen Axiome beschreiben die Bewegung einer Masse unter dem Einfluss einer Kraft.

Axiom 1 – Trägheitsprinzip

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{v} = \text{const.} \rightarrow \vec{a} = 0$$

Alle Körper verharren in Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußere Kräfte vorhanden sind.

Axiom 2 – Grundgesetz der Dynamik

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ → Die gesamte auf einen Körper wirkende Kraft ist gleich dem Produkt aus der Masse des Körpers und seine Beschleunigung. Wirkt auf einen frei beweglichen Körper eine Kraft F , so bewegt sich der Körper mit einer Beschleunigung a , die proportional zu der wirkenden Kraft ist.

Das 2. Axiom nimmt an, dass die Masse m konstant ist.
Je größer die Masse ist, desto größere Kraft ist erforderlich, um den Bewegungszustand (die Geschwindigkeit) des Körpers zu ändern. Die Masse ist das Maß der Trägheit.

Axiom 3 – Wechselwirkungsprinzip

Bei der Wechselwirkung zweier Körper ist die Kraft F_{12} , die der Körper 1 auf den Körper 2 ausübt, entgegengesetzt der Kraft F_{21} , die vom Körper 2 auf den Körper 1 ausgeübt wird (actio – reactio).

$$F_{12} = - F_{21}$$

Eine wesentliche Folge dieses Axioms ist, dass Kräfte immer paarweise auftreten.

2. Wie sind schwere und träge Masse definiert?

Träge Masse

Ist ein Maß dafür, wie sehr sich ein Körper einer Bewegungsänderung widersetzt.
Zwei Körper haben die gleiche träge Masse, wenn die Körper durch die gleiche Kraft gleich beschleunigt werden.

Schwere Masse

Gibt an, wie schwer oder leicht ein Körper ist und ist die Ursache der Gravitationswirkung.

Träge und schwere Masse stimmen überein (in kg).

Beweis Äquivalenzprinzip $m_{\text{schwer}} = m_{\text{träge}}$:

$$\vec{F}_G(r) = G \frac{m_{1,\text{schwer}} m_{2,\text{schwer}}}{r^2}$$

$$G = -\gamma$$

Für einem schweren Körper mit schwerer Masse gilt im Erdschwerefeld

$$\vec{F} = m \cdot g$$

$$m_{tr} \cdot \vec{a} = m_{schw} \cdot g$$

Das Äquivalenzprinzip $m_{tr} = m_{schw}$ führt nun zu:

$$\vec{a} = g$$

Alle Körper fallen (im Vakuum) im Erdschwerefeld gleich, unabhängig von ihrer Masse.

3. Wie begründet Einstein seine Annahme, dass es keinen Unterschied gibt?

Im Weltraum beschleunigt: träge Masse
In Ruhe auf der Erde: schwere Masse (Gravitationsbeschleunigung)
In einem fensterlosen Raum (Fahrstuhl) ist nicht unterscheidbar, was man verspürt.

4. Wie kann man das Verhältnis schwerer zu träger Masse experimentell bestimmen?

Freifallexperimente

5. Was ist ein Kraftfeld?

- Ein Raum in dem jeden Punkt eine Kraft herrscht
- Beschreibt die Kraft F auf einen Massepunkt oder eine elektrische Ladung, wenn F nur von dessen Lage r im Raum abhängig ist und z.B. nicht von seiner Geschwindigkeit
- $F = F(r)$
- Kraftfeld ist also eine Vektorfeld
- $F = -\text{grad } E_{\text{pot}}$ (grad: Richtung der Zunahme & Änderungsrate der Funktion)

6. Was ist ein konservatives Kraftfeld?

Kräfte, die längs eines geschlossenen Weges keine Arbeit verrichten. An Teilstrecken aufgewendete Energie wird an anderen Stellen wieder zurückgewonnen. Die kinetische Energie bleibt dem Probekörper erhalten.

7. Nennen Sie Beispiele für konservative und nichtkonservative Kräfte.

Konservativ: Erdanziehungskraft; Gravitationskraft oder Coulombkraft des elektrischen Feldes
Nicht konservativ: Reibungskraft und die Lorentzkraft

8. Beweise, dass das Schwerfeld konservativ ist.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$W = \int_A^B G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} dr + \int_A^B G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} r|_A^B = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot r|_A^B + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot r|_A^B = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot B - G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot A + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot A - G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot B = 0$$

Reale und Scheinkräfte

1. Erläutern Sie den Begriff Scheinkraft (Trägheitskraft).

Eine Realkraft wird von einer Wechselwirkung zwischen den Körpern hervorgerufen. Eine Scheinkraft kommt nur in beschleunigten Bezugssystemen vor. Sie wirken entgegengesetzt der Beschleunigung. Kommt bei geradlinigen Bewegungen vor und bei Kreisbewegungen (dort werden sie Zentrifugalkräfte genannt).

2. Warum werden Scheinkräfte eingeführt?
Um die Dynamik von Körper in bewegten Bezugssystemen zu beschreiben, da dort die newtonschen Axiome nicht gelten. Scheinkräfte haben keine Gegenkraft.

3. Geben sie Beispiele für Scheinkräfte an.
- In einem startenden Auto oder Flugzeug Bei einer Kurvenfahrt $\rightarrow$ Trägheitskraft
 - Bei Kreisbewegung - Zentrifugalkraft
 - Corioliskraft

4. Begründen Sie das Auftreten von Scheinkräften in beschleunigten Bezugssystemen (an Beispielen Kugel auf bewegtem Tisch, Zentrifugalkraft).

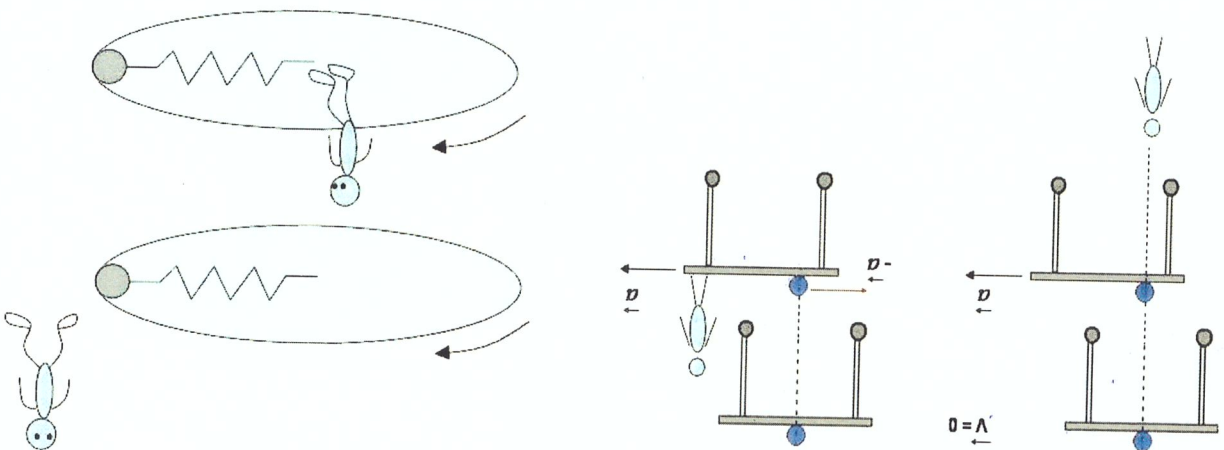


Abb. 1
(1) Da die Kugel rollen kann während sich der Tisch bewegt, verändert die Kugel nach außen hin die Position nicht.
(2) Sobald man Teil des bewegten Systems ist, sieht es aus, als würde eine Kraft wirken.

Abb. 2
(1)
Kugel bewegt sich von außen gesehen auf Kreisbahnen
Kugel wird durch Radialkraft auf Kreisbahnen gehalten
Reißt der Faden, so bewegt sich die Kugel tangential weiter
(2)
Kugel befindet sich in Ruhe
Beobachter stellt Zentrifugalkraft fest
Reißt der Faden bewegt sich die Kugel radial weiter

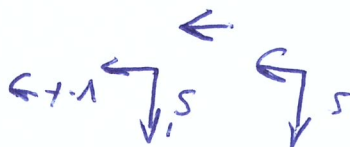
Galileische Transformation

Gleichungen, die es ermöglichen, die räumlichen und zeitlichen Koordinaten eines Punktes von einem Inertialsystem in ein anderes umzuwandeln.
 Sie gilt für unbeschleunigte Inertialsysteme, also für Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen, wobei die Geschwindigkeiten viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Galilei-Invarianz Prinzip:

Die grundlegenden Gesetze der Physik sind in alle Bezugssystemen, die sich zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, ident.

1. Zeigen Sie, dass die Kraft bei einer Galileitransformation nicht verändert wird.
 Da die beiden Systeme sich nur mit einer const Geschwindigkeit in x Richtung unterscheiden, ändern sich Beschleunigung und Masse nicht.



Zwei Systeme: S und S'
 Es gilt:
 $x = x' + vt$
 $y = y'$
 $z = z'$
 $t = t'$

Für die in S gemessene Geschwindigkeit u gilt:

$$v = \text{const} = v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_0 = u_x + v_0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = a'$$

$$F = ma = ma' = F'$$

2. Welche der Größen in inertialen Bezugssystemen invariant? r, v, a, F
 Weg r, Beschleunigung a und Kraft F

Inertialsystem

- Bezugssystem, das selbst keiner Beschleunigung unterliegt.
- Bezugssystem, indem ein kräftefreier Körper in Ruhe verharrt oder sich geradlinig-gleichförmig bewegt
- Bezugssystem, in dem Körper sich gemäß den newtonschen Axiome bewegen, in dem also keine Scheinkräfte auftreten
- Inertialsystem: Zug mit konstanter Geschwindigkeit
- Nicht Inertialsystem: rotierende Systeme (z.B.: Karussell, Erde)

Arbeit, kinetische und potentielle Energien

1. Wie ist Arbeit allgemein definiert?

Arbeit = Kraft * Weg

Dimension: $W = \frac{ML^2}{T^2}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$[W] = [F * s] = N * m = kg \frac{m}{s^2} m = kg \frac{m^2}{s^2} = Joule [J]$$

2. Welche Eigenschaften hat diese Größe (skalare oder vektorielle, Wegabhängigkeit, Vorzeichen)

- Skalare Größe.
- Kann negativ (F und s entgegengesetzt) und positiv (F und s zeigen in die gleiche Richtung) sein
- Je nach konservativer oder nicht konservativer Kraft kann sie wegunabhängig sein oder wegababhängig
- Nur für geradlinige Wege und (zeitlich & räumliche) konstante Kräfte

Potenitielle Energie:

Arbeitsvermögen, dass jeder Körper aufgrund seiner Lage (Höhe) besitzt.

$$E_{pot} = mgh [J]$$

$$E_{pot}(P) = - \int_P^{P_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Kinetische Energie:

Die durch Beschleunigungsarbeit zugeführte Energie, die ein Körper aufgrund seiner Geschwindigkeit besitzt.

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} [J]$$

4. Wie lauten die Maßeinheiten der Arbeit, der kinetischen, der potentiellen Energien?

Arbeit = kinetische Energie = potentielle Energie = $kg \frac{m^2}{s^2} = Nm = J$

5. Erklären Sie, warum die Definition der potentiellen Energie nur dann Sinn hat, wenn das Kraftfeld konservativ ist?

$$E_{pot}(P) = - \int_P^{P_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F}(\vec{r})$ ist die Kraft, die auf einen Massepunkt am Ort $\vec{r}$ wirkt und die durch Gegenkraft $-\vec{F}(\vec{r})$ überwinden werden muss, wenn er von P_0 nach P gebracht wird. Da $\vec{F}(\vec{r})$ als konservativ vorausgesetzt wurde, hängt E_{pot} nur vom Ort P ab, nicht aber vom Weg, auf welchem der Massepunkt nach P gelangt.

Konservatives Kraftfeld: Ist die Arbeit wegunabhängig.
Nicht konservatives Kraftfeld: Ist die Arbeit wegababhängig.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\vec{r})$$

$$E_{\text{pot}}(P) = - \int_P^{P_0} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

9. In welchem Zusammenhang stehen die Kraft und die potentielle Energie ($F \leftrightarrow E_{\text{pot}}$).

$$W = \int_A^B G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} dr + \int_A^B G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} r |_A^B dr =$$

$$= G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot B - G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot A +$$

$$+ G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot A - G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot B = 0$$

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

8. Beweisen Sie, dass das Schwerkraftfeld konservativ ist.

$$E_{\text{pot}}(h) = - \int_h^0 (mg) dz = - \int_h^0 m(-g) dz = mgh$$

$$E_{\text{pot}}(h=0) \equiv 0$$

7. Berechnen Sie die Arbeit, die aufzubringen ist, um einen Block der Masse m um die Höhe h zu heben.

Fällt ein Körper aus einer Höhe herunter, verringert sich seine potentielle Energie. Diese Energie verschwindet aber nicht, sondern wird in kinetische Energie umgewandelt.
Bei $h=0$, ist die potentielle Energie vollkommen in kinetische Energie umgewandelt.

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems bleibt bei allen Vorgängen konstant.
 $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$
Energie kann nur umgewandelt werden, geht aber nicht verloren.

$$E_{\text{kin}}(B) - E_{\text{kin}}(A) = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B)$$

$$E_{\text{kin}}(A) + E_{\text{pot}}(A) = E_{\text{kin}}(B) + E_{\text{pot}}(B) \quad \checkmark$$

$$E_{A \rightarrow B} = E_{\text{pot}}(A) - E_{\text{pot}}(B)$$

$$E_{B \rightarrow A} = E_{\text{pot}}(B) - E_{\text{pot}}(A)$$

6. Beweisen Sie den Energieerhaltungssatz der Mechanik.

$$A-B = \int_B^A$$

$$E_{PA} - E_{PB} = E_{PB} - E_{PA}$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik

1. Wie lautet der Energieerhaltungssatz?

$$W_{ges} = W_{kin} + W_{pot} = const.$$

Siehe Frage vorherige Seite

2. Unter welchen Bedingungen gilt der Energieerhaltungssatz der Mechanik?

In einem abgeschlossenen Bereich (abgeschlossenes System) gilt unter der Bedingung, dass keine Umwandlung von mechanischer Energie in andere Energieformen erfolgt: Die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie eines Körpers ist konstant.

Reibung

1. Welche Reibungskräfte kennen Sie?

Reibung: nicht konservative Kraft
 $\vec{e}_v$: Einheitsvektor in Richtung der Relativbewegung der beiden Oberflächen zueinander

- Gleitreibung ($R_G = \mu_G \cdot N$) / $\vec{F}_G = -\mu_G \vec{F}_N \vec{e}_v$
 - Tritt auf, wenn sich zwei Körper relativ zueinander und mit Kontakt bewegen
 - Behindert die Bewegung
 - Immer kleiner als die Haftreibung
 - Gleitreibungskraft verringert sich, wenn die Normalkraft verringert wird oder die Oberfläche geglättet wird.
 - Die Richtung der berechneten Kraft ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt
 - $\mu_G = \frac{a}{g}$
- Haftreibung ($R_H = \mu_H \cdot N$) / $\vec{F}_H = -\mu_H \vec{F}_N \vec{e}_v$
 - Verhindert das Einsetzen der Bewegung, bis eine Kraft kommt die größer ist und eine Bewegung verursacht
 - Hängt stark von der Oberseite des Materials ab
 - Entgegen der Bewegungsrichtung
 - $\mu_H = \tan(\varphi_H)$
 - φ_H stellt den maximalen Winkel einer Neigung dar, bei dem der Körper nicht mehr haftet und zu rutschen beginnt
- Rollreibung ($R_R = \mu_R \cdot N$) / $\vec{F}_R = -\mu_R \vec{F}_N \vec{e}_v$

- Bei Rädern
- Normalkraft nicht symmetrisch, da Eindrücken der Reifen asymmetrisch erfolgt
- $\mu_R = \frac{r}{d}$

• Stokes'sche Reibung $\vec{F}_S = -\mu_S \eta v \vec{e}_v$

- Reibungskraft zwischen Festkörper-Flüssigkeit bzw. Festkörper-Gas (nicht stark verdünnt)
- $\eta \dots$ Viskosität

Beispiele:

Gleitreibung: rutschen
Haftreibung: stehendes Auto mit angezogener Bremse $\rightarrow$ Haftreibung zw. Reifen und Straße
Gleitreibung: Fahrradfahrer

2. Was ist die Ursache der Reibung zwischen 2 festen Kontaktflächen?

Die Reibung zwischen zwei festen Kontaktflächen basiert auf die elektrostatischen Kräfte zwischen Elektronen und Atomkernen.

3. Was unterscheidet Haft- von Gleitreibung, und welche ist größer?

Haftreibung hindert einen Körper vom Rutschen $\rightarrow$ wenn er beginnt zu rutschen ist es Gleitreibung
Die Reibungskraft wirkt gegen die Bewegungsrichtung. Haftreibung ist größer.

4. Berechnen Sie die Kraft, die notwendig ist, um einen Körper der Masse m in horizontaler Richtung zu verschieben (Gleitreibungskoeffizient $= \mu_R$).

Die benötigte Kraft setzt sich zusammen aus der Haft- und Gleitreibung

$$\text{Haftreibung: } \vec{F}_{R,Haft} = -c_{R,Haft} F_N \vec{e}_v = -c_{R,Haft} F \cos \alpha \vec{e}_v$$

$$\text{Gleitreibung: } \vec{F}_R = -c_R F_N \vec{e}_v$$

Systeme von mehreren Massenpunkten, Impulserhaltungssatz, Stöße

1. Wie lautet die Formel für den Schwerpunkt eines Systems aus mehreren Massenpunkten?

Def. Schwerpunkt: Der Schwerpunkt eines Körpers ist das mit der Masse gewichtete Mittel der Positionen seiner Massепunkte. Für kontinuierliche Massenverteilungen wird das Ortsmittel der Dichte als Massenmittelpunkt definiert.

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i^N m_i}$$

$$\sum_i^N m_i \equiv M \text{ Gesamtmasse des Systems}$$

2. Wie definiert man Impuls? In welchem Zusammenhang stehen die auf den Körper wirkende Kraft und sein Impuls?

Charakterisiert den mechanischen Bewegungszustand eines Körpers.

Def. Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Dimension $[p] = [m] [v] = \text{kgms}^{-1}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Der Impuls ist umso größer, je schneller und massereicher das Objekt ist.

3. Wie lautet der Schwerpunktsatz?

Ist die Summe der äußeren Kräfte null, so bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig. Das heißt, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines abgeschlossenen Massenpunkte-Systems ist konstant.

4. Wie leitet sich der Schwerpunktsatz her?

Herleitung über den Impuls

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$

5. Wie lautet der Impulserhaltungssatz?

Der Impulserhaltungssatz ist einer der wichtigsten Erhaltungssätze der Physik. Er besagt, dass der Gesamtimpuls eines mechanisch abgeschlossenen Systems konstant ist. Er ist etwa bei der Beschreibung von Stoßprozessen von grundlegender Bedeutung, wo der Satz besagt, dass der Gesamtimpuls aller Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich ist.

$$\vec{p}_{ges} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

6. Wie leitet sich der Impulserhaltungssatz her?

Über 3. newtonsches Axiom

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0$$

→ Impuls 1 + Impuls 2 = konstant

7. Elastischer und unelastischer Stoß

Ein Stoß ist eine sehr kurze Wechselwirkung zwischen zwei Körpern. Durch den Stoß ändert sich die der Impuls und die Energie der Stoßpartner.

Manch den Impulserhaltungssatz auf einen elastischen Stoß anzuwenden kann gegen ein Wand ein

Elastischer Stoß
Bei einem elastischen Stoß bleibt der Gesamtimpuls und die kinetische Energie erhalten.

Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Kinetischer Energiesatz: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$

Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Fall 1: Beide Körper haben gleiche Masse ($m_1 = m_2$)
so gilt: $v_1' = v_2$ und $v_2' = v_1$

Fall 2: Leichter Körper stößt gegen ruhenden schweren Körper (z.B. Wand)
so gilt: $v_1' = -v_1$ und $v_2 = 0$

Man kann bei einem

Inelastischer Stoß

Bei einem inelastischen Stoß bleibt der Gesamtimpuls erhalten, jedoch wird ein Teil der Gesamtenergie in Wärme umgewandelt. (Die kinetische Energie bleibt nicht erhalten.)
Die zwei Körper bleiben nach dem Stoß aneinander kleben und bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit in die gleiche Richtung.

Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12}$

Kinetischer Energiesatz gilt nicht?

Daraus erhält man:

$$v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Fall 1: Beide Körper haben dieselbe Masse
 $v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

Elastischer Stoß:

Kinetische Energie	Bleibt erhalten
Impuls	Bleibt erhalten

Inelastischer Stoß:

Kinetische Energie	Bleibt nicht erhalten
Impuls	Bleibt erhalten

8. Unter welchem Winkel müsste der Körper auftreffen damit der Impulsübertrag maximal ist? Begründe die Antwort.

$$\underline{\underline{d = d_x e_x + d_y e_y}}$$

$$d_x = d \sin \alpha$$

$$d_y = d \cos \alpha$$

Bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 0^\circ$ (oder $90^\circ \rightarrow$ rechter Winkel auf die Wand) ist die Impulsübertragung maximal, da eine Komponente 0 und die andere 1 wird.

$$\underline{\underline{d' = d'_x e_x + d'_y e_y = d \sin \alpha e_x + d \cos \alpha e_y}}$$

9. Zwei reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene entlang einer gemeinsamen Geraden rollende Kugeln (m_1, m_2) treffen zentral mit den Geschwindigkeiten $|v_1|$ und $|v_2|$ aufeinander. Welche Geschwindigkeit haben beide Kugeln nach der Kollision, wenn der Stoß rein elastisch ist?

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

10. Zwei reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene rollende Kugeln (m_1, m_2) treffen unter einem Winkel von 30° mit den Geschwindigkeiten $|v_1|$ und $|v_2|$ aufeinander. Welche Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) haben beide Kugeln nach der Kollision, wenn der Stoß rein elastisch ist?

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Durch die Berechnung der Länge des Vektors erhält man die Geschwindigkeit.

11. Beschreiben Sie die Funktionsweise des Raketenantriebs.

Antrieb einer Rakete basiert auf dem Rückstoßprinzip. Bei Start wird durch das Verbrennen des Treibstoffes eine Kraft erzeugt, welche entgegengesetzt der Antriebsrichtung der Rakete wirkt. Hierbei

handelt es sich um die Masse des Treibstoffes und die Beschleunigung ist die, mit der er ausgestoßen wird.
 Das 3. Newtonsche Axiom besagt, dass eine Gegenkraft auftreten muss, welche gleich groß ist. Diese ist dafür verantwortlich, dass sich die Rakete vorwärtsbewegt.

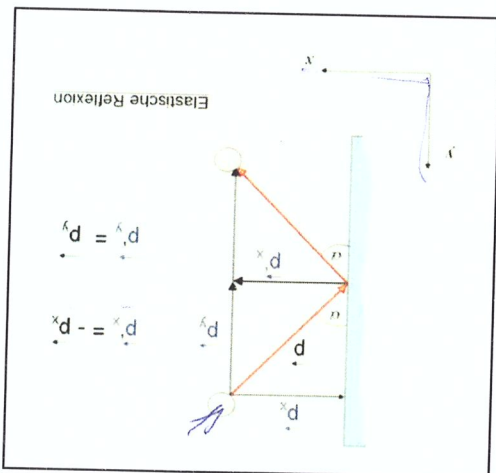
12. Erklären Sie den Rückstoß einer Schusswaffe.

Durch das Zünden der Treibladung in der Waffe, wird eine Kraft erzeugt, welche das Projektil nach vorne beschleunigt. Wegen dem 3. Axiom tritt hier aber auch eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft auf, welche den Rückstoß der Schusswaffe verursacht.

13. Eine Kugel trifft unter einem Winkel auf eine Wand. Der Stoß ist elastisch. Welchen Impuls und welche Richtung besitzen die Kugel nach dem Stoß? Formeln und Skizze

$$\vec{p}' = p'_x \vec{e}_x + p'_y \vec{e}_y = p \sin \alpha \vec{e}_x + p \cos \alpha \vec{e}_y$$

Einfallswinkel = Ausfallswinkel



14. Welche Erhaltungssätze müssen bei welchen Stößen gelten?

Elastischer Stoß:

Kinetische Energie	Bleibt erhalten
Impuls	Bleibt erhalten

Inelastischer Stoß:

Kinetische Energie	Bleibt nicht erhalten
Impuls	Bleibt erhalten

Gravitation

1. Erläutere die Begriffe Gravitationskraft, Gravitationsfeldstärke und Gravitationspotential und zeige wie diese Begriffe zusammenhängen.

Unter Gravitation versteht man die gegenseitige Anziehung der Körper durch ihre Massen. Die Schwerkraft, die auf der Erdoberfläche wirkt, entspricht der Gravitation zwischen einem Körper auf der Erdoberfläche und der Erde.

Gravitationsgesetz: $F_G(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$ mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{kg s^2}{m^3} \Rightarrow \gamma = \text{Gravitationskonstante}$

Mit Hilfe des Gravitationsgesetzes kann an der Erdoberfläche eine mittlere Fallbeschleunigung $\vec{g} = 9,81 \frac{m}{s^2}$ berechnet werden.

In weiterer Folge kann man ein Gravitationsfeld (Kraftfeld) definieren, das durch eine Masse (z.B. Erde) erzeugt wird. In einem Gravitationsfeld, werden auf andere Körper Gravitationskräfte ausgeübt.

Gravitationsfeld(stärke): $\vec{G}(r) = \frac{\vec{F}_G(r)}{m_1} = -grad V_{pot} = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{e}_r$ (das der Gravitationskraft zugrunde liegende Potential)

Um ein Gravitationsfeld zu veranschaulichen, verwendet man oftmals die Feldliniendarstellung. Jedem Punkt des Raumes wird eine Feldlinie zugeordnet. Die Tangente gibt die Richtung und die Länge gibt den Betrag des Feldes an. (Kraftlinien, Äquipotentialflächen)

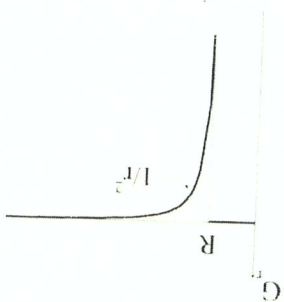
2. Skizziere den Verlauf des Gravitationsfeldes einer Hohl- und einer Vollkugel.

Gravitationsfeld einer Hohlkugel

Bei einer Hohlkugel nimmt man an, dass die Masse homogen auf der Oberfläche verteilt ist, wobei das Volumen der Kugelschale vernachlässigbar ist. Da in inneren der Kugel keine Masse vorhanden ist, ist in der Funktion von 0 bis R gleich 0.

Aus der Formel für die Gravitation geht weiters hervor, dass die Anziehungskraft indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes ist.

Außenraum: $G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}$

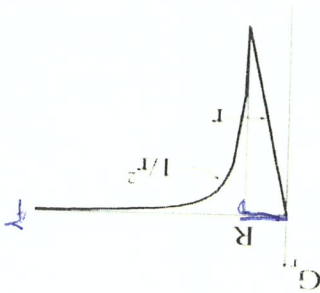


Gravitationsfeld einer Vollkugel

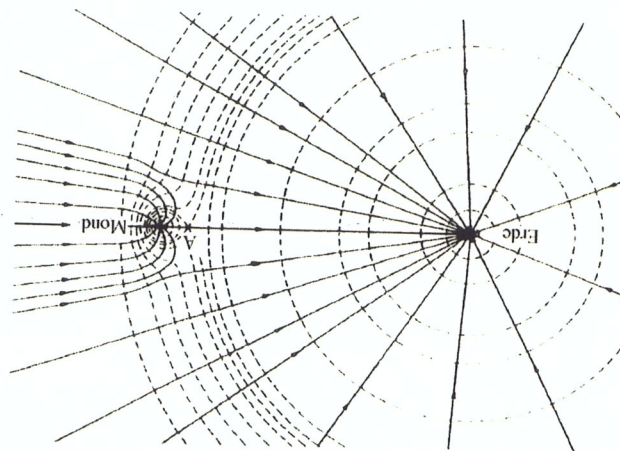
Im Gegensatz zur Hohlkugel, nimmt man bei der Vollkugel an, dass die Masse homogen auf das Volumen verteilt ist. Daher steigt im inneren der Kugel die Gravitation linear an. Außerhalb der Kugel verhält sich die Gravitation, wie bei einer Hohlkugel.

Innenraum: $G_r = -\gamma \frac{M}{R^3} r$

Außenraum: $G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}$



3. Skizzieren Sie das Gravitationsfeld für das System Erde – Mond.



$V = \text{konstant entlang der gestrichelten Linien (Äquipotential)}$
 grad V ist die steilste der vollen Linien (das ist die Richtung der Beschleunigung, Kraft)
 Am Punkt A: grad $V = 0$ (keine Beschleunigung) = abarischer Punkt;
 Ein Körper wird hier von der Erde und dem Mond mit gleicher entgegengesetzter Kraft angezogen.

4. Gibt es Orte, an denen keine Gravitationswirkung auftritt?

Bei einem Gravitationsfeld: NEIN

Bei mehreren Gravitationsfeldern gibt es Punkte, in denen sich die Anziehung aufhebt.

5. Was versteht man unter Gravitation, wie lautet das Gravitationsgesetz, geben Sie das Gravitationspotential an der Erdoberfläche an (Gleichung und Zahlenwert).

Gravitationsgesetz: $\vec{F}_G(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$ mit $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^3} \right] \rightarrow \gamma = \text{Gravitationskonstante}$

Mit Hilfe des Gravitationsgesetzes kann an der Erdoberfläche eine mittlere Fallbeschleunigung $\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R^3} \vec{R} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ berechnet werden.

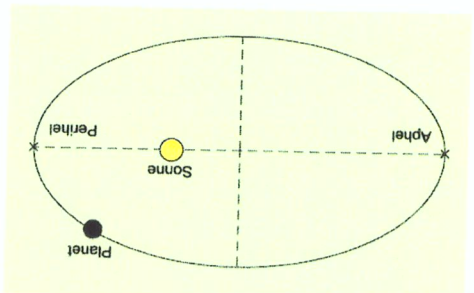
Gravitationspotential an der Erdoberfläche: $V_{\text{pot}} = -\gamma \frac{m}{r} \approx -6 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2$

6. Beschreiben Sie die Keplerschen Gesetze.

Die folgenden Gesetze gelten für alle Bewegungen von Himmelskörpern um einen Zentralkörper. Also Umlaufzeit der Planeten um die Sonne, Umlaufzeit der Satelliten um die Erde etc.

1. Kepler'sche Gesetz

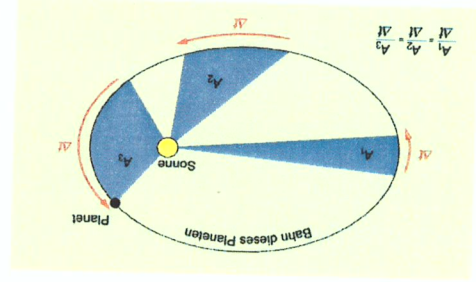
Die Planeten durchlaufen Ellipsen in deren Brennpunkt die Sonne steht.



2. Kepler'sche Gesetz

Der Leitstrahl zur Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

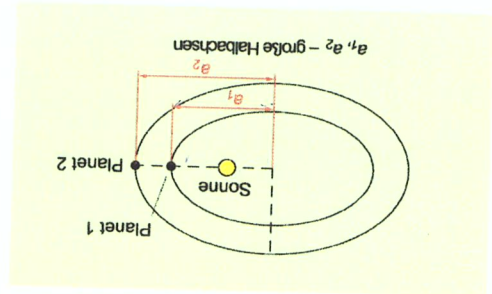
$$\frac{A_1}{\Delta t} = \frac{A_2}{\Delta t} = \frac{A_3}{\Delta t}$$



3. Kepler'sche Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse (a) der Ellipsenbahn.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$



7. Welche Größen sind bei der Planetenbewegung konstant?

$$\frac{da}{dt} = \text{const} \rightarrow 2. \text{ Kepler'sche Gesetz}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} \rightarrow 3. \text{ Kepler'sche Gesetz}$$

Starrer Körper

Rotation starrer Körper

1. Wie lautet die allgemeine Formel für den Drehimpuls?

Der Drehimpuls ist eine physikalische Erhaltungsgröße und damit kann der Bewegungszustand eines rotierenden Körpers beschrieben werden.
Ein System hat beispielsweise dann einen Drehimpuls, wenn es sich um einen Massenpunkt dreht. (z.B. Kreisell)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\omega = \theta\omega$$

$v = r\omega$

Dimension: $\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Der Drehimpuls in einem abgeschlossenen System ist immer konstant.

2. Wie lautet der Betrag des Drehimpulses in Richtung der Drehachse?

Der Drehmoment gibt an, wie stark eine Kraft auf einen drehbar gelagerten Körper wirkt. Er ist gleich der zeitlichen Ableitung des Drehimpulses.

$$\frac{dL}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{D}_M$$

Dimension: Nm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Das Trägheitsmoment

Der Trägheitsvektor gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit an.

Wenn bei einem sich drehenden Objekt die Masse näher zu Rotationsachse gezogen wird, verringert sich das Trägheitsmoment Θ . Da der Drehimpuls aber erhalten bleibt, muss sich die Winkelgeschwindigkeit ω erhöhen. (Pirouetten Effekt)

Trägheitsmoment bezüglich der ortsfesten Drehachse

$$\Theta_{z\omega} = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

Einheit: $[\text{kg m}^2]$

Damit gilt für die Drehimpulskomponente in Richtung der Ortsfesten Drehachse:

$$\vec{D}_{M\vec{e}_\omega} = \frac{d\omega}{dt} \theta \vec{e}_\omega$$

Drehimpulskomponente in Richtung der Drehachse:

$$L_{\vec{e}_\omega} = \omega \theta \vec{e}_\omega$$

Wenn bei einem sich drehenden Objekt die Masse näher zu Rotationsachse gezogen wird, verringert sich das Trägheitsmoment θ . Da der Drehimpuls aber erhalten bleibt, muss sich die Winkelgeschwindigkeit ω erhöhen. (Pirouetten Effekt)

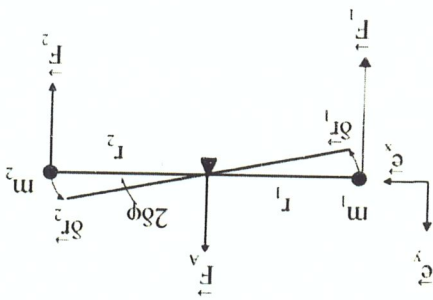
Mechanik starrer Körper

3. Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen?

Ein idealisierter starrer Körper hat zwei Massenpunkte m_1 und m_2 , welche durch eine massenlose Stange miteinander verbunden sind, auf welche jeweils eine Kraft F_1 und F_2 einwirkt. Er befindet sich genau dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller inneren und äußeren Kräfte beim Massenpunkt m_1 genau der Summe aller inneren und äußeren Kräfte im Massenpunkt m_2 entspricht.

→ Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller äußeren Kräfte und Drehmomente verschwindet.

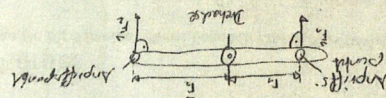
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \text{ und } \sum_j \vec{D}_{M_j} = 0$$



4. Wie lautet das Hebelgesetz?

Hebelgesetz
 Für zwei beliebige Hebel gelten die gleichen Gesetze.
 Bspw. ist ein Hebel im Gleichgewicht, so gilt das Hebelgesetz.
 Für alle Hebel im Gleichgewicht gilt unter der Bedingung, dass die Kräfte senkrecht
 am Hebel angreifen:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$
 oder
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$$
 oder
$$\frac{F_1}{r_1} = \frac{F_2}{r_2}$$
 r: Kräftearm



Das Hebelgesetz kann auch durch die Größe Drehmoment formuliert werden

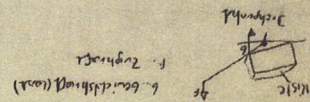
Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn das linksdrehende Drehmoment gleich dem rechtsdrehenden Drehmoment ist.

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

Einstufiger Hebel:

- Last & Kraft wirken auf gleicher Hebelstelle
- Stelle, um die der Hebel beim Abheben gedreht wird nennt man Drehpunkt
- Die Drehkräfte wirken durch den Drehpunkt

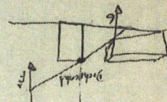


Es ist notwendig, dass

z.B. Flankenlager, Ringe, Schraubenmutter

Zweistufiger Hebel:

- Last & Kraft wirken auf verschiedenen Stellen
- Der Drehpunkt und damit die Drehkräfte liegen auseinander



z.B. Waage, Schere, Zange

$$\delta W = \vec{F} \delta \vec{r}$$

Prinzip der virtuellen Verschiebung

5. Welche Methode verwendet man bei der Herleitung des Hebelgesetzes?

Wahl v. Vorgehens. Weg nach Zeit

Bei gleichen Masse: $\theta_{cu}^{Wahl} > \theta_{cu}^{Fall} \Rightarrow$ Wahl muss langsamer sein

neu Behälter und ein Fall in Vacuum

$$V_E^2 = \frac{2mgL \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2}$$

$$V_{trans} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2mgL \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2}} r^{1/2} e_r \equiv A_1 r^{1/2} e_r$$

$$\frac{dr}{dt} = A_2 dt$$

$$2r^{1/2} + C = A_2 dt \quad t=0 \quad r=0 \Rightarrow C=0$$

$$r = \left(\frac{1}{2} A_2 \right)^2 t^2$$

$$r(t) = \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2 e_r$$

$$R_1 = \frac{R_4}{2}$$

$$Wahl: r(t) = \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2 e_r$$

$$\begin{aligned} \text{Hohl: } r(t) &= \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} \left(\frac{1}{2} m R_2^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{R_4}{2} \right)^2 \right) t^2 e_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2 e_r \\ &= \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2 e_r \end{aligned}$$

$$\Delta r(t) = \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2 - \frac{1}{2} \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \theta_{cu}^2} t^2$$

$$\frac{4}{13} = 3 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{8}{26}$$

$$2 \left(\frac{8}{13} \right)$$

$$\frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m \frac{1}{4}$$

Starrer Körper

6. Zeigen Sie für 3 in einer Ebene liegende Kräfte, die Gleichgewichtsbedingungen.

Wenn 3 Kräfte in einer Ebene liegen muss $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$ als Gleichgewichtsbestimmung erfüllt sein.

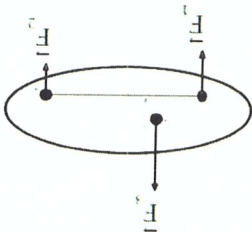
Drehmomente zeigen in dieselbe Richtung.

➔ Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller äußeren Kräfte und Drehmomente verschwindet.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{D}_{M1} + \vec{D}_{M2} + \vec{D}_{M3} = 0$$

7. Wie findet man die Gleichgewichtsbedingungen, wenn 2 der 3 Kräfte parallel sind?



Sind zwei dieser Kräfte gleichgerichtet, so muss die dritte Kraft die Verbindungslinie der Angriffspunkte von F_1 und F_2 im umgekehrten Verhältnis dieser Kräfte teilen und entgegengesetzt gerichtet sein.

8. Sie lassen einen Hohl- und einen Vollzylinder gleichen

Außendurchmessers (R_a) und gleicher Masse eine unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigte Ebene herunterrollen. Der Innendurchmesser (R_i) des Hohlzylinders sei halb so groß wie der Außendurchmesser. Wie groß ist der Wegunterschied nach der Zeit t .

Hinweis: das Trägheitsmoment des Hohl- bzw. Vollzylinders ist $\frac{1}{2}m(R_a^2 + R_i^2)$ bzw. $\frac{1}{2}m(R_a^2)$

Siehe davor

S. 74+75

Rotiert ein starrer Körper um eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht und bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit $v = \text{const}$, so kann die Geschwindigkeit in zwei Komponenten zerlegt werden. Die Schwerpunktschwindigkeit und die Rotationsgeschwindigkeit.

9. Welche Größen der Rotation entsprechen den translatorischen Größen Impuls, Kraft und kinetischer Energie?

Translation	Gleichung	Einheit	Rotation	Gleichung	Einheit
Weg	s		Winkel	φ	rad
Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	m/s	Winkelgeschw.	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	rad/s = s ⁻¹
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt}$	m/s ²	Winkelbesch.	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	rad/s ² = s ⁻²
Masse	m	kg	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 dm$	kg * m ²
Kraft	$F = ma = \frac{dp}{dt}$	N = kg * m/s ²	Drehmoment	$M = J\alpha = \frac{dL}{dt}$	N * m
Impuls	$p = mv$	kg * m/s = N * s	Drehimpuls	$L = J\omega$	kg * m ² /s = N * m * s
Arbeit	$W = \int F ds$	N * m = J = W * s	Arbeit	$W = \int M d\varphi$	N * m = J = W * s
Kinet. Energie	$E = \frac{mv^2}{2}$	N * m = J = W * s	Kinet. Energie	$E = \frac{J\omega^2}{2}$	N * m = J = W * s
Leistung	$P = \frac{dW}{dt}$	W = J/s	Leistung	$P = \frac{dW}{dt}$	W = J/s

Translation	Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Kraft	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Körper konst. Masse	$\vec{F} = m\vec{a}$	kinetische Energie	$W_{km} = \frac{1}{2}mv^2$	Leistung	$P = \vec{F}\vec{v}$
-------------	--------	----------------------	-------	---------------------------------	---------------------	----------------------	--------------------	----------------------------	----------	----------------------

Rotation	Drehimpuls	$\vec{L}_e = \vec{\omega} \Theta_e$	Drehmoment	$\vec{D}_{Le} = \frac{d\vec{L}_e}{dt}$	Körper konst.	$\vec{D}_{Le} = \Theta_e \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Trägheitsmoment	$W_{km} = \frac{1}{2}\omega^2 \Theta_e$	Leistung	$P = \omega \vec{D}_{Le}$
----------	------------	-------------------------------------	------------	--	---------------	--	-----------------	---	----------	---------------------------

$\vec{L} \times \vec{p} = L$
 $\vec{L} \times \vec{F} = \vec{D}$

10. Gib die Formeln in vektorieller Form an.

11. Wie lautet der Ausdruck für die kinetische Energie bei Rotation um eine starre Achse? Geben Sie die Gesamtenergie an, wenn der Rotation eine Translationsbewegung überlagert ist. Welcher Energiebetrag ist eine Erhaltungsgröße?

(1)
$$W_{\text{rot}} = \frac{\omega^2}{2} L_{\text{rot}} = \frac{1}{2} L_{\text{rot}} \omega$$

Verschiedenes Drehmoment

(2)
$$\frac{dL_{\text{rot}}}{dt} = 0$$

und

$$L_{\text{rot}} = \text{const.}$$

Man ist wegen der Gleichheit der Drehimpulse auch die Rotationsenergie eine Erhaltungsgröße $\rightarrow W_{\text{rot}} = \text{const.}$

(3) Gesamtenergie:

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{rot}} + W_{\text{trans}}$$

$$= \frac{\omega^2 L_{\text{rot}}}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

rot trans

$$\vec{c}_w = \vec{c}_z$$

$$\theta_{zw} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r_T^3 dr_T d\varphi dz = \int_0^h \frac{4}{2\pi} h R_1^4 = \frac{2}{\pi} h R_1^4$$

$$m = \rho \pi h R_1^2$$

Wichtigkeiten:

$$\vec{c}_w = \vec{c}_z$$

$$\theta_{zw} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r_T^3 dr_T d\varphi dz = \int_0^h \frac{4}{2\pi} h (R_1^4 - R_2^4) = \frac{2}{\pi} h (R_1^4 - R_2^4)$$

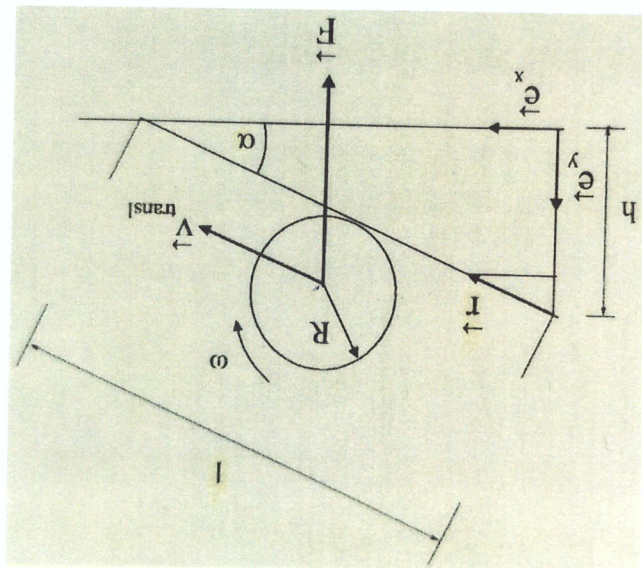
$$dm = \rho dr = \rho r_T d\varphi dr_T dz$$

$$\theta_{zw} = \int_0^h \int_0^{2\pi} r_T^3 dm$$

$$m = \rho \pi h (R_1^2 - R_2^2)$$

Wichtigkeiten: Ungleichgewichte:

12. Skizzieren Sie die Berechnung des Trägheitsmomentes für einen Hohlzylinder/Vollzylinder bei Rotation um die Zylinderachse.



$$h = l \sin \alpha \text{ und } y = h - r \sin \alpha$$

$$\vec{F} = -mg \vec{e}_y$$

$$W^{pot}(t) = - \int_y^0 \vec{F} (dy' \vec{e}_y) = mg \int_y^0 dy' = mgy$$

$$W^{kin}(t) = \frac{1}{2} m v_{transl}^2 + W^{kin(rot)} = \frac{1}{2} m v_{transl}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energieerhaltungssatz: $W^{kin}(t) + W^{pot}(t) = W^{ges}$

Start:	$t = 0$	$v_{transl} = 0$	$W^{kin} = 0$	$W^{pot}(t = 0) = W^{ges} = mgh$
Ende:	$t = t_E$	$v_{transl} = \vec{v}_E$	$W^{pot} = 0$	$W^{kin}(t = t_E) = W^{ges}$

$$\left(\frac{1}{2} m v_{transl}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + mgh(h - y) = mgh(h - y) = mgh \sin \alpha$$

$$v_{transl}^2 = \frac{2mgh \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

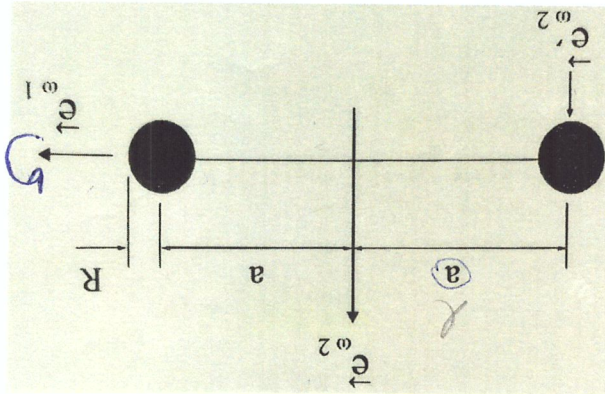
$$\text{Ende: } v_{transl} = v_E \text{ und } r = l$$

$$v_E^2 = \frac{2mgl \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Hohlzylinder: $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$
 Vollzylinder: $I = \frac{1}{2} m R^2$

$$\theta^{(e_{\omega_2})} = 2 \left[\theta^{(e_{\omega_2})} + m b_{\perp}^2 \right] = 2 \left[\frac{5}{2} m R^2 + m a^2 \right] = 2 m \left(\frac{5}{2} R^2 + a^2 \right) \text{ wobei } b_{\perp} = a$$

$$\theta^{(e_{\omega_1})} = 2 \left(\frac{5}{2} m R^2 \right)$$



15. Zwei Kugeln (Radius R) sind durch eine masselose Stange (Länge l) miteinander verbunden. Wie groß ist das Trägheitsmoment, wenn die Rotationsachse mit der Verbindungsstange zusammenfällt? Wie groß ist das Trägheitsmoment, wenn die Rotationsachse durch den Schwerpunkt geht und senkrecht auf die Verbindungsstange steht? Hinweis: Trägheitsmoment einer Kugel: $\frac{2}{5}(mR^2)$

Drehimpuls in Richtung der Ortseigenen Drehachse: $\vec{L}_{Me\omega} = \frac{d}{dt} \theta_{e\omega}$

14. Wie ist das Trägheitsmoment eines starren Körpers definiert (Dimension), wie hängt es mit dem Drehimpuls bei Rotation um eine ortsfeste Achse zusammen?

Satz von Steiner:
Wenn Abstand $(b) = 0 \rightarrow$ dann ist Trägheitsmoment am geringsten $\rightarrow$ Drehachse geht durch den Schwerpunkt

$$\theta_{e\omega}^{(v)} = \theta_{e\omega}^{(s)} + m b_{\perp}^2$$

Theta

$$\theta_{e\omega} = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

Einheit: $[kg \cdot m^2]$

Der Trägheitsmoment gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit an.

13. Wie ist das Trägheitsmoment definiert? Geben Sie die Formel und die Dimension an. Beschreiben Sie seine Bedeutung. Bezüglich welcher Achse ist das Trägheitsmoment minimal? Begründen Sie das anhand des Satzes von Steiner.

Relativitätstheorie

1. Wie lautet das Relativitätsprinzip?

Das Relativitätsprinzip besagt, dass die Naturgesetze für alle Beobachter dieselbe Form haben. *Einblick in das Auge, dass es aus einem Punkt in der Unendlichkeit* *oder abstrakten Beispiel wird die Inertialsysteme*

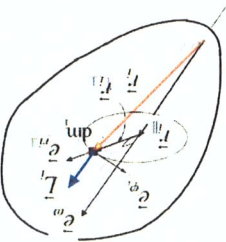
2. Was ist Zeitdilatation?

Die Zeitdilatation bewirkt, dass alle inneren Prozesse eines physikalischen Systems relativ zum Beobachter langsamer ablaufen, wenn sich dieses System relativ zum Beobachter bewegt. Das bedeutet, dass auch Uhren, die sich relativ zum Beobachter bewegen, langsamer gehen als Uhren, die relativ zum Beobachter ruhen. Ein physikalisches Vorgang dauere in einem Ruhesystem nicht so lange, wie der gleiche Vorgang in einem dazu bewegten System. Vereinfacht: Bewegte Uhren gehen langsamer

3. Was ist das Zwillingsparadoxon und wie wird es gelöst?

Wir haben gezeigt, dass aufgrund der Zeitdilatation die Zeit für einen sehr schnell bewegten Beobachter langsamer vergeht als für einen ruhenden. Bei dem Zwillingsparadoxon geht es darum, dass ein Raumfahrer mit hoher Geschwindigkeit (nahe c) von der Erde wegfiegt, umkehrt, und mit ebenso hoher Geschwindigkeit wieder zurückkehrt. Der Beobachter der sich auf der Erde „in Ruhe“ befindet, sieht, wie der Raumfahrer langsamer altert (die Zeit in dem bewegten System des Raumfahrers vergeht langsamer). Da jedoch alle Inertialsysteme gleichwertig sind, sieht auch der Raumfahrer, der sich in seinem Raumschiff „in Ruhe“ wähnt, wie der Erdbeobachter langsamer altert als er selbst, da sich, in seinem Bezugssystem, die Erde rasant von ihm fortbewegt / auf ihn zu bewegt. Bei der Rückkehr auf die Erde ist für den Raumfahrer, nachweislich, weniger Zeit vergangen als für den Erdbeobachter.

17. Zeigen Sie wie man mit Hilfe des Prinzips virtueller Verschiebungen das Hebelgesetz ableiten kann.



Betrachtet man die Drehbewegung eines homogenen starren Körpers um eine ortsfeste Achse mit der Richtung $\vec{e}_\omega$, so bewegt sich jedes Massenelement auf einer Kreisbahn, die in einer Ebene senkrecht zur Drehachse verläuft und deren Mittelpunkt auf der Drehachse liegt.

16. Wie ist ein Massenelement, der Schwerpunkt und die Winkelgeschwindigkeit bei Rotation um eine ortsfeste Achse definiert (Skizze)?

Rote Linien sind Linien der Gleichzeitigkeit des sich wegbewegenden Inertialsystems, die blauen Linien entsprechen der Gleichzeitigkeit in dem Inertialsystem, in dem der Raumfahrer zur Erde zurückkehrt. Hier sieht man deutlich, dass es für den Raumfahrer so aussieht, als würde der Erdbesucher, während des Umkehrens, sprunghaft altern. Der Raumfahrer durchläuft dabei 8 „Ebenen“ von Gleichzeitig (Abstand 1 Jahr), während der Erdbesucher 10 Ebenen durchläuft. Der Zeitunterschied von 2 Jahren entspricht dem Ergebnis, wenn der Raumfahrer mit 60% der Lichtgeschwindigkeit zu einem 3 Lichtjahre entfernten Objekt reist, und gleichermaßen wieder zurückkehrt.

1 Punkt: 1 Jahr Eigenzeit

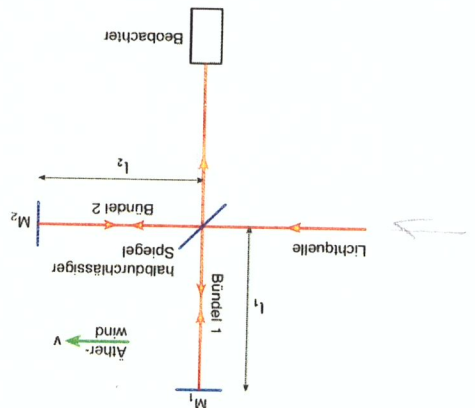
4. Beschreiben Sie das Michelson-Morley Experiment. Welche Konsequenzen sind daraus zu ziehen?

Mit diesem Experiment wurde versucht nachzuweisen, dass es ein Medium (Äther) im Vakuum gibt mit Hilfe dessen sich Licht ausbreiten kann (Wellen). Es wurde angenommen, dass aufgrund der Geschwindigkeit des Inertialsystems relativ zum Äther (Vergleich: Bewegung in und gegen den Fahrtwind) die beiden Lichtsignale nicht zum selben Zeitpunkt zurückkommen würden. Das ist aber nicht so. Die Lichtsignale kamen zeitgleich an es trat Interferenz am Bildschirm auf. Das Experiment wurde auch zu verschiedenen Jahreszeiten durchgeführt.

Mit Hilfe eines Interferometers wird Licht ausgesandt. Dieser Lichtstrahl wird mithilfe eines halbdurchlässigen Spiegels geteilt (einmal um 90° abgelenkt und einmal gerade aus).

Konsequenzen:

- Es ist kein Trägermedium für die Lichtausbreitung notwendig. Licht kann sich auch im Vakuum ausbreiten.
- Die Lichtausbreitung im Vakuum erfolgt in allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit.
- Die Definition des Inertialsystems mit der Behauptung, dass es unmöglich ist, ein System als ruhend auszuzeichnen, bleibt aufrecht (Relativitätsprinzip).
- Ereignisse erfolgen gleichzeitig, wenn zwei Lichtsignale zur gleichen Zeit einen von ihnen gleich weit entfernten Beobachter treffen.



5. Geben Sie die Lorentztransformation für ein relativ zu S mit der Geschwindigkeit v bewegtes System S' an. Erläutern Sie die Konsequenzen.

"räumlich + zeitl. Koordinaten von P von einem Inertialsystem in einem anderen umrechnen"

Unterschied Galilei- und Lorentz-Transformation
Die Umrechnung der Koordinaten von einem Inertialsystem in ein anderes ist mit Hilfe der Galilei-Transformation möglich, solange die Geschwindigkeiten vernachlässigbar gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Für größere Geschwindigkeiten nimmt man die Lorentz-Transformation. Umrechnungen Lorentztransformation:
Die Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, muss man bei der Transformation zwischen zwei bewegten Inertialsystemen berücksichtigt werden.

Annahme: Bewegung nur in x-Richtung; Ausgangssituation bisher (Galileitransformation):
 $x = x' + vt$ und $x' = x - vt$

Muss aufgrund des Relativitätsprinzips berücksichtigt werden:
 $c = \text{const} \rightarrow x = ct$ und $x' = ct'$

Um diese Forderung zu erfüllen, muss eine Korrektur eingeführt werden.

Lorenzfaktor γ

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

➔ Für kleine Geschwindigkeiten: $v \ll c \rightarrow \gamma \approx 1$ geht in GT über

Von S' nach S $x = \gamma(x' + vt')$ $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$	Von S nach S' $x' = \gamma(x - vt)$ $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$
---	--

$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$	$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$
--	---

Konsequenzen:

Durch die Lorentztransformation können alle Effekte der relativistischen Kinematik, wie die Zeitdilatation oder der Längenkontraktion, hergeleitet werden.

6. Wie ändern sich Längen, Zeiten und die Masse bei hohen Geschwindigkeiten?

Zeit: Je schneller sich ein Objekt im Raum bewegt, desto langsamer vergeht die Zeit, relativ zu einem ruhenden Beobachter.

Länge: In seinem Ruhesystem hat der Körper die größte Länge (Eigenlänge). In einem dazu bewegten System ist die Länge geringer.

Masse: Eine Masse, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, wird gegenüber ihrer Ruhemasse m_0 um den Faktor k größer $\rightarrow m_{rel} = k \cdot m_0$

7. Welche Größen sind in der Relativitätstheorie invariant gegenüber der Lorentztransformation?

Lichtgeschwindigkeit

Ruhemasse ist eine Lorentzinvariante

8. Wie lautet der relativistische Energieerhaltungssatz?

$$\text{Impuls: } p = m u_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} \quad u_z = \frac{d_z}{dt} = \frac{m_0}{m} \left(\frac{d}{dt} \right)_z$$

Ausdruck für Energie einsetzen:

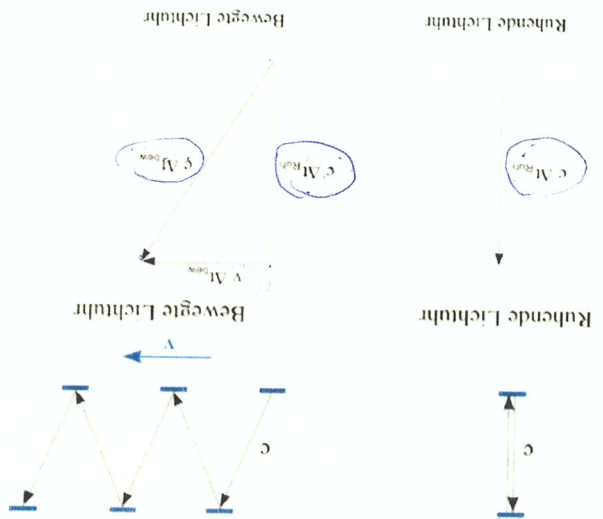
$$W_z = \frac{m_0 c^4}{m_0 c^4} = \frac{1 - \frac{u_z^2}{c^2}}{1 - \frac{u_z^2}{c^2}} \frac{m_0 c^4}{d_z} = m_0 c^4 + c^2 p_z^2$$

Relativistischer Energieerhaltungssatz: $W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_z^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2}$

Lorentzinvariante

$$m_0^2 c^4 = W_z^2 - c^2 p_z^2$$

9. Zeige das eine bewegte Uhr langsamer geht als eine ruhende.



10. Wie heißt dieser Effekt?

Zeitdilatation

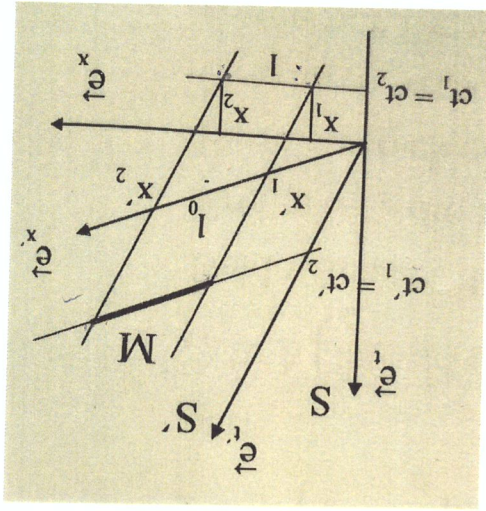
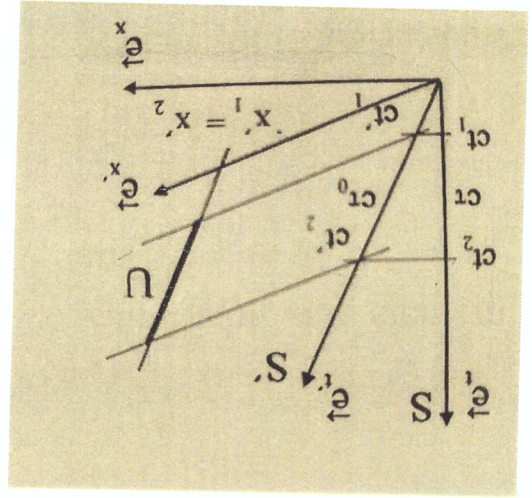
11. Geben Sie eine geometrische Deutung der Lorentzkontraktion und der Zeitdilatation.

Lorentzkontraktion

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Zeitdilatation

$$t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t_0}$$



12. Skizzieren Sie die Herleitung für das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

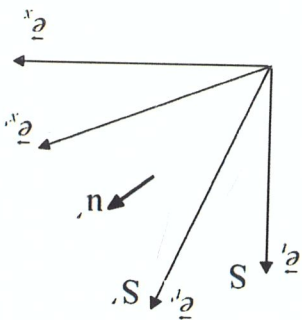
Das Superpositionsprinzip ist durch die Verknüpfung von Raum und Zeit nicht gültig.

Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}' = (u'_x \vec{e}_x + u'_y \vec{e}_y + u'_z \vec{e}_z)$ im System S' .

Ausgang: Lorentztransformation
 $u'_x = \gamma(x' + vt')$

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u_x\right)} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u_x\right)}$$

$$u = u'_x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$



Für Licht, das sich mit der Lichtgeschwindigkeit im System S' ausbreitet $u'_x = c$, erhält man im System S wieder die Lichtgeschwindigkeit.

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

Herleitung

Wir haben vorausgesetzt, dass sich das Objekt mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt. Daher ist die Weg-Zeit-Funktion eine lineare Funktion und man kann die Geschwindigkeit einfach aus ihrer Steigung bestimmen.

Greifen wir zwei Punkte (t_1, x_1) und (t_2, x_2) im System S heraus, wobei $t_2 > t_1$ sei. Dann gilt für die Geschwindigkeit u als Steigung der Funktion

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Im System S' kann ich die entsprechenden Punkte (t'_1, x'_1) und (t'_2, x'_2) durch die besprochene Lorentz-Transformation finden. Zunächst kann man schreiben

$$u' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}.$$

Setzt man nun die Formeln für eine Lorentz-Transformation ein, so erhält man

$$u' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)}{\gamma(t_2 - vt_2/c) - \gamma(t_1 - vt_1/c)} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}$$

und nach Division durch $t_2 - t_1$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{1 - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}.$$

Unter Berücksichtigung der Formel für u folgt weiter

$$u' = \frac{1 - \frac{v}{c^2} u}{1 - \frac{v}{c^2} u}.$$

13. Stelle die Galileitransformation der Lorentztransformation gegenüber?

Diese Transformationen haben das Ziel, zwei sich relativ zueinander bewegte Inertialsysteme ineinander umzurechnen.

Unterschied Galilei- und Lorentz-Transformation

Die Umrechnung der Koordinaten von einem Inertialsystem in ein anderes ist mit Hilfe der Galilei-Transformation möglich, solange die Geschwindigkeiten vernachlässigbar gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Für größere Geschwindigkeiten nimmt man die Lorentz-Transformation.

Galilei:

- Berücksichtigt die Zeitkoordinate nicht
- In beiden Inertialsystemen die gleichen Längenverhältnisse

Lorentz:

Die Formeln für die Lorentztransformation stellen sozusagen die „Grundgleichungen der Speziellen Relativitätstheorie“ dar. Die Lorentztransformation ist nötig um die neuen Erkenntnisse (Zeitdilatation, Längenkontraktion...) zu berücksichtigen – also die Unterschiede zur galileischen Physik einzubeziehen.

- Zeit- und Längenveränderung in verschiedenen Inertialsystemen
- $c = \text{const.}$

Konsequenz

Von jedem physikalischen Prozess, der aus einer Menge von Ereignissen besteht und in einem Inertialsystem beobachtet wird, kann vorausgesagt werden, wie er in einem anderen Inertialsystem wahrgenommen wird.

Die Zeitdilatation und Längenkontraktion sind eine Konsequenz der Lorentztransformation.

14. Wie lautet der relativistische Energiesatz? Zeigen Sie unter welchen Bedingungen der in der klassischen Mechanik gültige Ausdruck für die kinetische Energie folgt.

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_z^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2}$$

$$\overbrace{W_{kin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Wenn das Verhältnis $\frac{v}{c} \ll 1$ ist, dann darf man auf den aus der Newtonschen Mechanik bekannten Ausdruck für die kinetische Energie zurückgreifen.

Formel für kinetische Energie

$$E_{kin} = E(v) - E_0$$

$$E_{kin} = \gamma m c^2 - m_0 c^2$$

Formel für Gesamtenergie

$$E = E_0 + E_{kin}$$

$$E = m_0 c^2 + \gamma m c^2 - m_0 c^2$$

Formel für Ruheenergie (invariante der LT)

$$E_0 = m_0 c^2$$

15. Energie-Masse-Äquivalenzprinzip

$$E = m c^2$$

E... Gesamtenergie eines Körpers

m... dynamische (relativistische) Masse des Körpers

c... Lichtgeschwindigkeit

Die Gesamtenergie eines Körpers und seiner dynamischen Masse sind zueinander proportional. Masse und Energie sind äquivalent. Das bedeutet, im Unterschied zur klassischen Physik, dass die beiden Größen nicht unabhängig voneinander existieren, sondern dass jede Form von Energie einer Masse zugeordnet werden kann und umgekehrt jeder Masse einer Energie entspricht.

Jede Masseänderung bedeutet eine Energieänderung und umgekehrt.

Schwingungen

Gedämpfte Schwingung

1. Wie lautet die Schwingungsgleichung der gedämpften Schwingung? Wie wird sie aufgestellt und was bedeuten ihre einzelnen Terme?

Schwingungsgleichung der gedämpften Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta = \frac{c_s \eta}{2m} \dots \text{Dämpfungskonstante}$$

$$\omega_0 = \frac{c_F}{m} \dots \text{Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c_s \eta \frac{dx}{dt} + \frac{m}{c_F} x = 0$$

$\eta \dots$ Viskosität
 $c_s \dots$ Stoksscher Reibungskoeffizient
 $c_F \dots$ Federkonstante
 $m \dots$ Masse

2. Geben Sie einen Lösungsansatz an und zeigen Sie, dass er die Schwingungsgleichung erfüllt.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + c_s \eta \frac{dx}{dt} + \frac{m}{C_F} x = 0$$

Da es sich hierbei um eine Differenzialgleichung handelt, verwenden wir den Lösungsansatz

$$x(t) = \text{const } e^{\alpha t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha \text{ const } e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \alpha^2 \text{ const } e^{\alpha t}$$

Führt zur quadratischen Gleichung:

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

➡ Einsetzen in Ansatz ergibt die komplexe Schreibweise der gedämpften Schwingung

$$x(t) = \text{const } e^{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}$$

Je nachdem ob $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ reell, imaginär oder Null ist, unterscheidet man drei verschiedene Bewegungsformen.

3. Diskutieren Sie die verschiedenen Lösungen die sich ergeben und skizzieren Sie die Bewegungsabläufe.

$$x(t) = \text{const } e^{-\beta t} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) t$$

Die Bewegung des Körpers in der die Reibung verursachenden Flüssigkeit wird durch das Verhältnis von ω_0 und β bestimmt. Je nachdem ob die Wurzel $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ reell, imaginär oder Null ist, unterscheidet man drei verschiedene Bewegungsformen.

Gedämpfte Schwingung ($\omega_0^2 > \beta^2$)

$$x(t) = \text{const } e^{-\beta t} \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \sin(\omega t + \psi) \right)$$

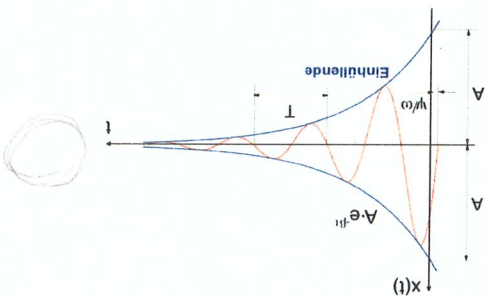
Umgeschrieben:

$$x(t) = C e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi)$$

Die Amplitude nimmt mit $e^{-\beta t}$ ab. β

beschreibt die Dämpfung der Schwingung, die mit der

Frequenz ω oszilliert. Die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ist kleiner als die des ungedämpften.

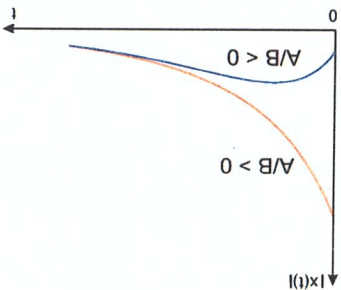


Aperiodischer oder Kriechfall ($\omega_0^2 < \beta^2$)

Bewegungsgleichung

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A e^{t \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + B e^{-t \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right]$$

Die Vorzeichen der Konstanten A und B bestimmen den Bewegungsverlauf.



Aperiodischer Grenzfall ($\omega_0^2 = \beta^2$)

Bewegungsgleichung

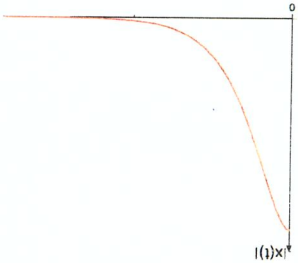
$$x(t) = e^{-\beta t} (A + B t)$$

Da die Bewegung durch die Überlagerung zweier Schwingungen beschrieben wird, müssen beide Parameter an die Anfangsbedingungen angepasst werden. Man verwendet dazu das Verfahren der „Variation der Konstanten“.

Man erhält:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 t + A_2)$$

Mit den an die Anfangsbedingungen anzupassenden Parametern A_1 und A_2 .



4. Was ist das logarithmische Dekrement?

Das logarithmische Dekrement, Formelzeichen Λ (Großes Lambda) ist ein Maß für das Dämpfungsverhalten in frei schwingenden Schwingungssystemen. Das logarithmische Dekrement errechnet sich aus dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses der Amplitude zweier beliebiger Ausschläge gleicher Richtung.

Ungedämpfte Schwingung Masse/Feder System

1. Lösen Sie die Bewegungsgleichung eines eindimensionalen ungedämpften Masse/Feder Systems.

Schwingungsgleichung einer freien Schwingung:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m}{c_F} x = 0$$

Da es sich hierbei um eine Differenzialgleichung handelt, verwenden wir den Lösungsansatz

$$x(t) = \text{const } e^{\alpha t}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \alpha^2 \text{const } e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 + \frac{m}{c_F} = 0$$

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = \pm i \omega_0$$

$$x(t) = \text{const } e^{\pm i \omega_0 t}$$

Wenn $e^{\pm i \omega_0 t}$ bzw. $i e^{\pm i \omega_0 t}$ eine Lösung ist, müssen auch Kombinationen dieser Lösung eine Lösung sein. Mit den Formeln für die Winkelfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \frac{1}{2} * (e^{+i \omega_0 t} + e^{-i \omega_0 t}) \\ \sin(\omega_0 t) &= \frac{1}{2i} * (e^{+i \omega_0 t} - e^{-i \omega_0 t}) \end{aligned} \right\}$$

Folgt die Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Die Bewegungsgleichung des Massepunktes wird durch die Überlagerung der 2 Schwingungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ dargestellt.

Wenn die Lösung $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \psi)$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ gefordert ist weiter machen mit:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Die Bewegungsgleichung des Massepunktes wird durch die Überlagerung der 2 Schwingungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ dargestellt.

Da die Darstellung der Bewegung durch eine Überlagerung von zwei Schwingungen gleicher Kreisfrequenz jedoch unterschiedliche Amplituden unanschaulich ist, formt man nochmals um.

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega_0 t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega_0 t) \right)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\frac{C}{B} \sin(\psi) = \frac{C}{B}$$

$$\frac{C}{A} \cos(\psi) = \frac{C}{A}$$

Es folgt:

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$$

2. Herleitung der Bewegungsgleichung für ungedämpfte Schwingungen

$$\vec{F} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{e}_x \quad (2. \text{ Newtonsche Axiom})$$

Wenn nur die Federkraft als rücktreibende Kraft berücksichtigt wird, so erfolgt die Verformung der Feder rein elastisch.

Es gilt daher:

$$= -C_F x \hat{e}_x$$

Und damit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{C_F}{m} x = 0$$

3. Welche Bedingungen muss die rückwirkende Kraft erfüllen?

Bei einer harmonischen Schwingung ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung.

Es gilt das lineare Kraftgesetz.

$$F = -D \cdot s \text{ (entspricht dem Hookeschen Gesetz)}$$

D... Federkonstante

s... Auslenkung

negatives Vorzeichen... Rückstellkraft ist der Auslenkungsrichtung entgegengesetzt

bzw.

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} \cdot \vec{e}_x = -c_F \cdot \vec{x}(t) \cdot \vec{e}_x$$

2. Newton'sches Axiom
Federkraft (Hookesches Gesetz)

c_F ... Federkonstante

Die Rückstellkraft muss so groß sein wie das 2. Newtonsche Axiom.

4. Wie groß ist die Eigenfrequenz und die Periodendauer?

Eigenfrequenz

Die Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen Systems, sind diejenigen Frequenzen, mit denen das System ohne Einfluss äußerer Kräfte nach einer einmaligen Anregung schwingen kann.

$$\omega_0 = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$

Verknüpfung mit den physikalischen Eigenschaften des Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m} - c_F}$$

Dimension: $\frac{1}{s} = 1 \text{ Hz}$

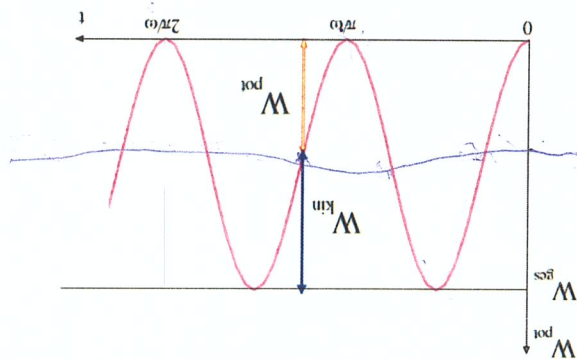
D... Federkonstante

m... Masse

Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

5. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von potentieller und kinetischer Energie.



$$W_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2 = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m \cdot \omega_0^2}{2} \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \psi)$$

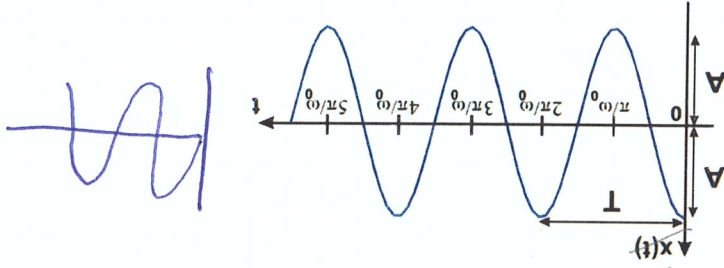
$$W_{pot} = \frac{m \cdot \omega_0^2}{2} \cdot x^2 = \frac{m \cdot \omega_0^2}{2} \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \psi)$$

$$W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$$

$$W_{ges} = \frac{m \cdot \omega_0^2}{2} \cdot A^2$$

6. Skizzieren Sie den Bewegungsablauf der Masse in einem Weg-Zeit-Diagramm, und zeichnen Sie Amplitude und Periodendauer in die Skizze ein.

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

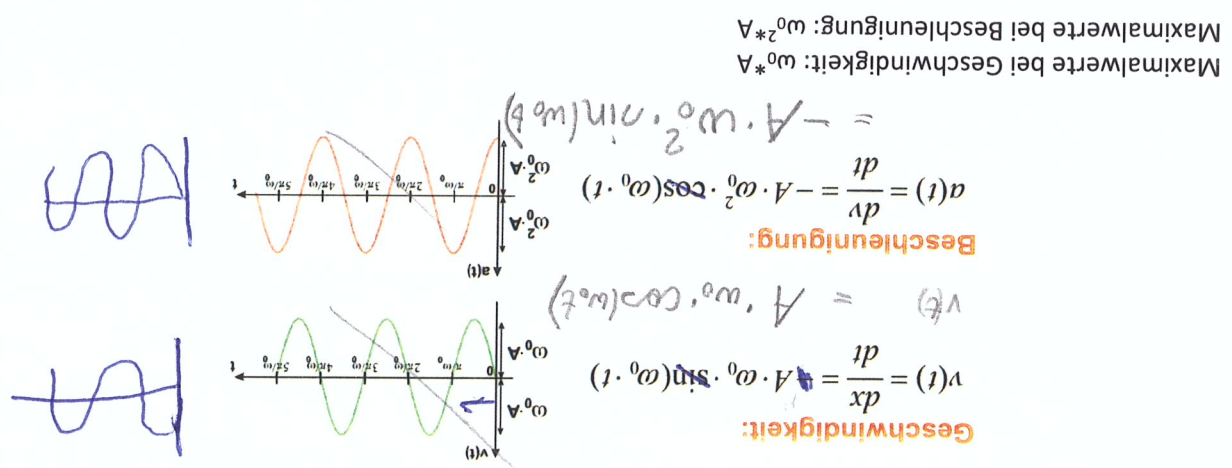


7. Wie verändert sich die Eigenfrequenz der harmonischen Schwingung, wenn die Masse verdoppelt, die Federkonstante jedoch konstant gehalten wird?

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_F}{m}}$ verdoppelt man die Masse, verringert sich die Eigenfrequenz um etwa 0.23 Hz.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_F}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_F}}$$

8. Wie lauten die zeitabhängigen Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ und wie groß sind ihre Maximalwerte?



Mathematisches Pendel

Gegeben ist ein mathematisches Pendel:

1. stellen Sie seine Bewegungsgleichung mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes auf.

$$\frac{dp}{dt}(W_{kin} + W_{pot}) = 0$$

$$W_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

$$r = l \text{ und } |\dot{r}| = 0$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dl}{dt} = 0$$

$$W_{pot} = - \int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\vec{F} = mg\vec{e}_x = \vec{F}_r + \vec{F}_\phi = mg(\cos\phi\vec{e}_r - \sin\phi\vec{e}_\phi)$$

$$W_{pot} = -mg \int_0^\phi (\cos\phi' \vec{e}_r - \sin\phi' \vec{e}_\phi) l d\phi' = mgl \sin\phi = p \phi = -mgl \cos\phi|_0^\phi =$$

$$= -mgl(\cos\phi - 1)$$

$$\frac{dp}{dt} \left[\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi} - mgl(\cos\phi - 1) \right] = 0$$

$$l \left(\frac{dp}{d\phi} \right) \dot{\phi} + \frac{dp}{d\phi} \sin\phi = 0 \text{ wobei } \phi \approx$$

$$0 = \phi \frac{dl}{d\phi} + \frac{dp}{d\phi}$$

Lösung für die DGL

$$\phi(t) = A \sin(\omega t + \psi)$$

Anfangsbedingungen

$$t = 0, \phi(0) = 0 \text{ und } \dot{\phi}(0) = v_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \text{ mit der Periode } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Schwerkraft	Rückwirkende Kraft: Federkraft
$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_F}{m}}$
Pendel:	Feder:

2. Wie groß ist die Eigenfrequenz der beiden Systeme?

ψ = Phase (wenn ω_0 gleich der Erregerfrequenz ist dann wird ψ 0)

$$\varphi(t) = A * \sin(\omega_0 t + \psi)$$

Mathematisches Pendel

$$x(t) = A * \sin(\omega_0 t + \psi)$$

Masse/Feder

1. Wie lauten die Schwingungsgleichungen für ein Masse/Feder System und für ein mathematisches Pendel?

Gegenüberstellung Masse/Feder und Mathematisches Pendel

Kürzt sich in der Herleitung weg, weil die beiden Energie beim Energieerhaltungssatz gleichgesetzt werden.

Warum hängt die Eigenfrequenz nicht von der Masse des Pendels ab?

g... Erdbeschleunigung
l... Länge Pendelstange

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3. Wie groß ist die Eigenfrequenz des Pendels?

m... Masse
g... Erdbeschleunigung

Schwerkraft: mg

2. Was ist die Rücktreibende Kraft des Pendels?

3. Welche der Eigenfrequenzen hängt von der Masse ab, welche nicht?

$$\text{Eigenfrequenz von Feder hängt von der Masse ab: } \omega_0 = \sqrt{\frac{c_F}{m}}$$

$$\text{Eigenfrequenz vom Pendel hängt von der Länge ab: } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

4. Sie bringen beide Systeme auf den Mond. Welche Eigenfrequenz ändert sich gegenüber der auf der Erde, welche nicht?

Pendel ändert sich, da die Eigenfrequenz vom Pendel von der Gravitationskonstante abhängt.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

1. Wie lautet die Schwingungsgleichung?

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_{\eta} \frac{dx}{dt} + c_F x = F_0 e^{i\omega t}$$

F_0 ... Äußere Kraft

ω ... Eigenfrequenz des Erregers

2. Wie wird sie aufgestellt und was bedeuten die einzelnen Terme?

Schwingungsgleichung wird der periodischen Kraft gleichgesetzt

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_{\eta} \frac{dx}{dt} + c_F x = F_0 e^{i\omega t}$$

F_0 ... Äußere Kraft

ω ... Eigenfrequenz des Erregers

1. Term ($m \frac{d^2 x}{dt^2}$): Kraft $\rightarrow F=ma$

2. Term ($c_{\eta} \frac{dx}{dt}$): Reibungskraft nach dem Stokes'schen Reibungsgesetz

3. Term ($c_F x$): Hooke'sches Gesetz: Kraft die die Feder ausübt

4. Term ($F_0 e^{i\omega t}$): Erregerkraft mit imaginär Teil

3. Mit welcher Frequenz schwingt das System im stationären Zustand?

Erklärung stationärer Zustand
Ist die Anregung periodisch, geht die erzwungene Schwingung nach einem Einschwingvorgang allmählich in die stationäre erzwungene Schwingung über.

Antwort: Groß Omega
Nach längerer Zeit stellt sich bei Anregung mit einer Kreisfrequenz Ω ein stationärer Zustand mit zeitlich konstanter Amplitude $A(\Omega)$ und Phase $\psi(\Omega)$ ein.

*Wahrscheinlich
erklären den cos Funktion*

4. Wie hängen Amplitude und Phasenwinkel von der Frequenz ab?

Amplitude, abhängig von Erregerfrequenz Ω

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \Omega)^2}}$$

Phase, abhängig von Erregerfrequenz Ω

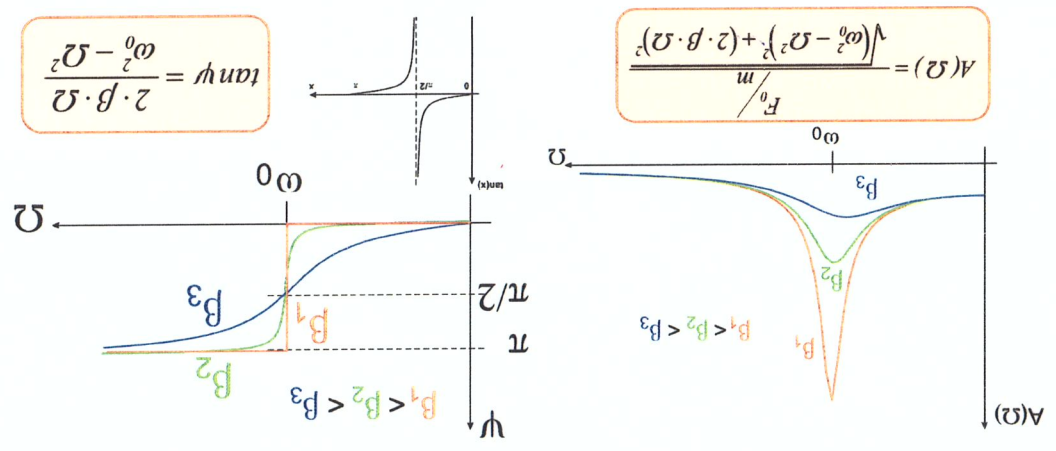
$$\tan \psi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2 \cdot \beta \cdot \Omega}$$

5. Was ist die Resonanzkatastrophe und wie kann sie vermieden werden?

Bei $\omega = \omega_0$ geht ψ durch Null und die Amplitude besitzt ein Maximum, das umso ausgeprägter ist, je kleiner der Dämpfungsfaktor β ist. Bei $\beta = 0$ und $\omega = \omega_0$ tritt die „Resonanzkatastrophe“ ein. Der Erreger pumpt so lange Energie in das System, bis es zur Selbstzerstörung kommt.

Verhindert werden kann dies durch eine wirkungsvolle Dämpfung.
Berühmtes Beispiel: Einsturz der Tacoma-Hängebrücke (USA) 1940

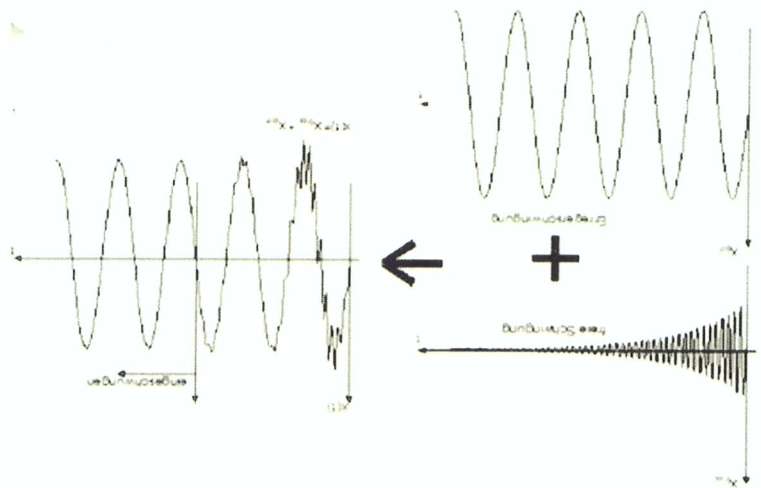
6. Skizzieren Sie Amplitude und Phasenwinkel im stationären in Abhängigkeit von der Dämpfung und von Ω .



Einschwingvorgang
 Ein gedämpftes Masse/Feder System wird von einem Erreger, der sich periodisch mit der Kreisfrequenz Ω bewegt, angetrieben.

1. Welche Schwingungen überlagern sich beim Einschwingvorgang?

Freie Schwingung und Erregerschwingung



2. In welcher Zeit ist in etwa der stationäre Zustand erreicht?

Typischerweise nach einer Zeit

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

3. Was sind Schwebungen und warum sind sie beim Einschwingvorgang wichtig, wenn das Masse/Federsystem eine geringe Dämpfung aufweist und nahe seiner Eigenfrequenz angeregt wird?

Schwebung = Überlagerung von 2 Schwingungen mit gleicher Amplitude und ähnlicher Kreisfrequenz. Wenn die Eigenfrequenzen fast gleich oder gleich sind, werden die Amplituden der beiden Schwingungen addiert. Somit hat das angeregte System sehr schnell eine hohe Amplitude.

Elektrostatik

Punktladungen

1. Welche Eigenschaften haben elektrische Ladungen?

Ladung immer mit positiver Masse verknüpft
Ladung ist immer mit Masse verknüpft, jedoch ist die Masse nicht mit der Ladungsstärke verbunden. Für den Aufbau der Materie sind Protonen und Elektronen maßgebend.

2. Einheit

$[Q] = C$ (Coulomb)

3. Quantelung

Jede elektrische Ladung ist im Rahmen der hier betrachteten Gesetzmäßigkeiten ein ganzzahliges Vielfaches einer Ladungseinheit, die man als Elementarladung bezeichnet. $Q = n \cdot e$

4. Zwei Ladungsarten

Zwei Ladungsarten: positiv und negativ. Gegensätze ziehen sich an, gleiche stoßen sich ab

5. Erhaltung

Die Summe der elektrischen Ladungen in einem abgeschlossenen System ist konstant.

6. Trennung und Rekombination

Am Beispiel der Vorzeichendefinition ist ersichtlich, dass Ladungen sich trennen lassen und sich wieder vereinigen.

Das bedeutet für Trennung: um auf einem Körper eine Ladung mit einem bestimmten Vorzeichen und einer bestimmten Menge zu erzeugen, muss auf einem anderen Körper die genau gleich Ladungsmenge

jedoch mit umgekehrten Vorzeichen stehen (Glasstab – Leder)

Paarbildung: geladene Teilchen können sich nur paarweise bilden oder annihilieren.

Paarbildung

Invarianz der Ladung bei Bewegung

Bei allen Überlegungen, die für den elektrischen Strom, d.h. die Bewegung einer Ladung, angestellt werden, wird angenommen, dass die Ladung unabhängig von der Geschwindigkeit des Ladungsträgers ist.

2. Was ist die Einheit der elektrischen Ladung?

Einheit: $[Q] = C$ (Coulomb)

3. Wie lautet das Coulomb-Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

$Q_1, Q_2 \dots$ Ladungen

$r \dots$ Abstand zwischen Mittelpunkt der Ladungsmengen

$\epsilon_0 \dots$ elektrische Feldkonstante

Kraftgesetze
Geben Sie das Coulomb-Gesetz der Elektrostatik und das Gravitationsgesetz nach Newton an.

Das Coulomb-Gesetz beschreibt die zwischen zwei Punktladungen wirkende Kraft.

Elektrostatik:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Gravitationsgesetz:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

1. Erläutere die einzelnen vorkommenden Größen in Bedeutung und Dimension.

Coulomb-Gesetz

ϵ_0 = elektrische Feldkonstante ($8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$)

Q_1, Q_2 = Ladungen

r = Abstand der Mittelpunkt der Ladungen

Gravitationsgesetz:

$m_1, m_2, \dots$ Massen der Körper

r ... Abstand zwischen den Massen

G ... Gravitationskonstante ($6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$)

2. Was haben beide Gesetze gemeinsam. Worin unterscheiden sie sich.

Gemeinsamkeit: Die Coulombkraft weist mathematisch dieselbe Struktur auf wie die Gravitationskraft.

Unterschied: es gibt nur positive Massen, d.h. bei der Gravitationskraft gibt es nur Anziehung, bei der Coulombkraft gibt es Anziehung und Abstoßung.

3. Diskutieren Sie die Bedeutung beider Gesetze und geben Sie Beispiele an wo welches Gesetz wesentlich ist.

Beide Gesetze sind sehr wichtig. Coulomb Kräfte sind eher in kleinen Systemen entscheidend, Gravitationskräfte in großen. Kraftwirkung für 2 Elektronen im Abstand von 1 cm: hier ist die Coulomb Kraft wesentlich größer als die Gravitationskraft (um 43 Nachkommastellen!). Bei großen Systemen=große Massen (Planeten,...) ist die Gravitationskraft wesentlich größer, bzw. Anziehung zwischen Mond und Erde.

Elektrisches Feld

Gegeben ist eine Punktladung Q

1. Beschreiben Sie, wie man vorgeht, um deren Feld $\vec{E}$ zu ermitteln

Um ein elektrisches Feld zu ermitteln, legt man eine beliebige Fläche (A) an. Nun kann man überprüfen, ob innerhalb dieser Fläche ein elektrischer Fluss vorhanden ist.

Wenn nein:

$$\oint \vec{E} d\vec{f} = 0$$

Wenn ja:

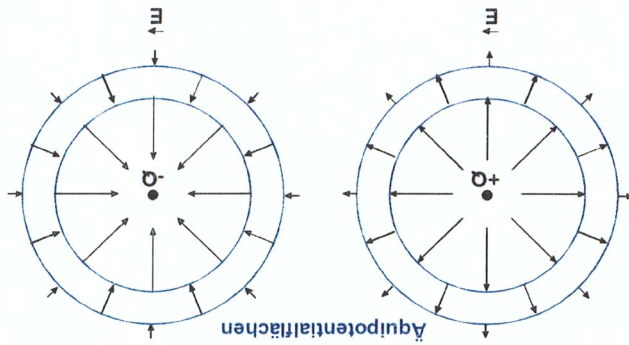
$$\oint \vec{E} d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Definition elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q} = \frac{Q_2}{Q} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$[\vec{E}] = \frac{C}{N} \text{ (Newton pro Coulomb)} \triangleq \text{V/m (Volt pro Meter)}$$

2. Skizzieren Sie die Feldvektoren einer positiven Punktladung Q und einer negativen Punktladung $-Q$



3. Was ist das Superpositionsprinzip?

Die Kraftwirkung zweier Punktladungen wird durch die Anwesenheit einer dritten nicht beeinflusst.

Elektrisches Feld und Potential
Gegeben ist eine Punktladung Q

1. Durch welchen Ausdruck ist das Elektrische Feld $\vec{E}$ der Punktladung Q gegeben?

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1} * \frac{1}{|\vec{r}|^2} * \vec{e}_r$$

$$[\vec{E}] = \frac{C}{N}$$

2. Zeigen Sie, dass das Integral entlang eines Geschlossenen Weges $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ gleich Null ist.

Für ein Punktladung gilt entlang eines beliebigen geschlossenen Weges C für die Arbeit W:

$$W = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{Q} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Das bedeutet: Entlang dem geschlossenen Weg C wird im E-Feld bei Bewegung der Ladung Q2 keine Arbeit verrichtet. Es gilt daher weiters:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

3. Wie ist das Potential V_p von $\vec{E}$ definiert und mittels welchen Operators kann $\vec{E}$ aus V_p ermittelt werden?

Wenn gilt $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, so kann $\vec{E}$ als Gradient einer skalaren Funktion V_p dargestellt werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V_p(\vec{r})$$

$$V_p(\vec{r}) = - \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{Q} * \frac{4\pi\epsilon_0}{|\vec{r}|} + \text{const}$$

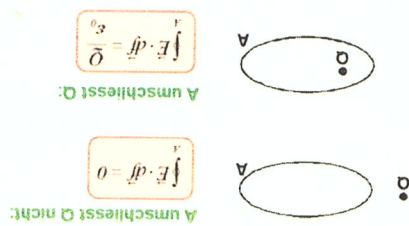
const=0

Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik

1. Wie ist der Fluss Φ des E-Feldes durch eine geschlossenen Fläche A definiert?

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

2. Wie groß ist Φ , wenn Q innerhalb/außerhalb von A liegt?



3. Wie lautet das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik?

Das Gauß'sche Gesetz, beschreibt in der Elektrostatik und Elektrodynamik den elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche. Das Gauß'sche Gesetz ist die erste der vier Maxwell Gleichungen.

$$\Phi = \oint_A \vec{E} d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Φ ... elektrischer Fluss durch eine geschlossene Fläche f eines Volumens V
 Q ... Gesamtladung in V
 ϵ_0 ... elektrische Feldkonstante

Dipol

Gegeben sind zwei Punktladungen, die um einen Abstand a voneinander entfernt sind.

1. Welche Eigenschaften müssen diese haben, um einen elektrischen Dipol zu bilden.

Ladungen müssen gleich groß sein und entgegengesetzte Vorzeichen haben.

2. Wie ist das elektrische Dipolmoment μ_e definiert?

$$\mu_e = Q * a$$

$$\text{Dimension: } [\mu_e] = Cm$$

3. Wie lautet das elektrostatische Potential des Dipols und wie können Sie daraus sein Feld ermitteln?

Potential:

$$V_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\mu_e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\mu_e}{r^2}$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}(r) = -grad V_p(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} * \frac{\mu_e}{r^3} * (3\vec{\mu}_e \vec{r} - \mu_e^2 \vec{e}_r)$$

4. Betrachten Sie ein Wassermolekül und ein Kohlendioxidmolekül. Welches der beiden weist ein permanentes Dipolmoment auf?

Das Wassermolekül (H_2O) weist wegen seines geometrischen Aufbaus ein permanenten Dipolmoment auf. Das Kohlendioxidmolekül (CO_2) nicht.

Dipol im Feld

Gegeben ist ein elektrischer Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{\mu}_e$.

ϕ Q φ
 großbuchst. kleinbuchst.

1. Welche Kräfte und Drehmomente wirken auf den Elektrischen Dipol in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_x$.

Gesamtkraft auf Dipol

$$\vec{F}_{ges} = Q\vec{E} - Q\vec{E} = 0$$

→ Im homogenen Feld wirkt auf ein Dipol keine Kraft.

Sondern nur ein Drehmoment

$$\vec{D}_M = \vec{\mu}_e \times \vec{E}$$

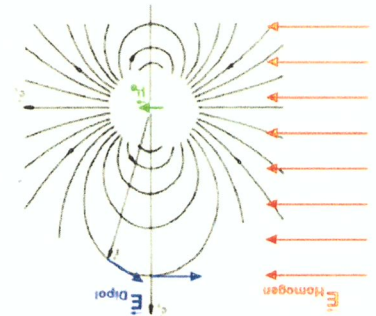
*Dipolmoment
Kreuz
elektr. Feld*

2. Wie richtet sich das elektrische Dipolmoment $\vec{\mu}_e$ relativ zu $\vec{E}$ aus?

Das Dipolmoment wird sich immer in Feldrichtung ausrichten (stabile Lage)

3. In welche Richtung relativ zu $\vec{E}$ zeigt das Fernfeld des Dipols auf der y-Achse?

Das Fernfeld des Dipols ist dem homogenen Feld entgegengesetzt.



Leiter

Gegeben ist ein beliebig geformter elektrischer Leiter.

1. Welche Eigenschaften haben Ladungen im Leiter?

In einem Leiter sind Ladungen frei beweglich. Da sich gleichnamige Ladungen abstoßen gilt: Das Innere eines Leiters ist ladungsfrei.

2. Wie groß ist das elektrische Feld im Inneren des Leiters?

Da es ladungsfrei ist, ist das elektrische Feld gleich 0.

Von innen nach außen ändert sich das Feld sprunghaft von $E = 0$ auf $E = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}$ in einem Bereich infinitesimaler Dicke dx . Das Feld im Außenraum ist normal zur Oberfläche gerichtet.

3. Wie groß ist das Feld im Außenraum des Leiters, wenn dieser die Gesamtladung Q trägt?

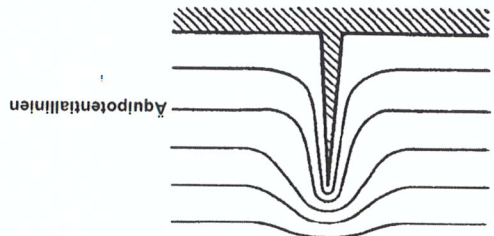
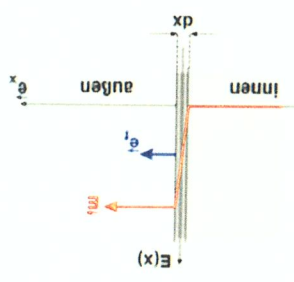
5. Was ist ein Faraday'scher Käfig und auf welchem Prinzip beruht er?

Faraday'scher Käfig: Von Leitern begrenzte Hohlräume bleiben feldfrei; kleine Öffnungen sind vernachlässigbar (Auto im Gewitter); Die aufgebrauchten Ladungen wandern an die Leiteroberfläche, somit bleibt das innere feldfrei!

Das Prinzip der Influenz (ist für oben genanntes verantwortlich).

4. Was ist der Spitzeneffekt und wie kommt er zustande?

Hohe Feldstärke an der Spitze (hoher Potentialgradient).
Grund: Hohe Flächenladungsdichte aufgrund der geringen Fläche der Spitze.

$$p_e' \equiv \frac{dQ_{oberfl}}{df}$$

$$|\vec{E}_{außen}| = \frac{p_e'}{\epsilon_0}$$

In einem Leiter wandern alle Ladungen an die Oberfläche. Daraus resultiert eine Oberflächenladungsdichte p_e' .

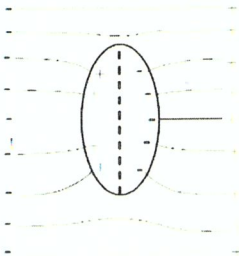
Gegeben ist ein beliebig geformter elektrischer Leiter. Dieser wird in ein homogenes äußeres elektrisches Feld E_0 eingebracht.

1. Wie groß ist das resultierende Feld E im Inneren des Leiters?
Das Innere des Leiters bleibt aufgrund der Ladungssseparation feldfrei.

2. In welche Richtung zeigt das Feld E im Außenraum relativ zur Leiteroberfläche?
Das Feld E steht normal auf die Leiteroberfläche

3. Wie verteilen sich die Ladungen auf der Leiteroberfläche?

Bringt man einen ungeladenen Leiter in ein äußeres homogenes Feld, so wird dieses verzerrt. Im Leiterinneren muss Feldfreiheit erhalten bleiben, das bedeutet wieder, dass das Feld im Außenraum senkrecht auf die Leiteroberfläche stehen muss. Diese Bedingung wird vom Leiter dadurch erreicht, dass er Ladungen separiert. Teile der Oberfläche werden positiv und andere negativ geladen.



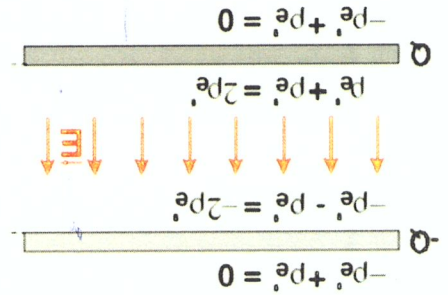
4. Was passiert, wenn Sie den Leiter trennen und das äußere Feld abschalten?

Wenn der Leiter getrennt wird und man danach das äußere Feld abschaltet, bleibt die Ladungstrennung erhalten.
Abbildung darüber *bleibt geladen*

Kondensator
Gegeben seien zwei leitende Platten im Vakuum der Fläche A mit dem Abstand d .

1. Was passiert, wenn eine der Platten mit der Gesamtladung Q und die andere mit der Gesamtladung $-Q$ geladen wird?

Ein elektrisches Feld entsteht im Innenbereich, nicht aber im Außenbereich. Das Feld verläuft von der positiv geladen zur negativ geladenen Platte.



2. In welche Richtung zeigt das Feld E im Inneren dieses Kondensators und wie groß ist sein Betrag?

2. Was ist die Polarisation P_{el} ?

Es bilden sich die Polarisationsladungen Q_p aus, und zwar $-Q_p$ gegenüber der positiven Platte des Kondensators und $+Q_p$ gegenüber der negativen Platte des Kondensators. Damit können wir die Polarisationsladungen genauso als geladene Ebenen betrachten, die eine Art Kondensator bilden. E_p zeigt genau entgegen E_0 (Skizze). Damit ergibt sich gemäß dem Superpositionsprinzip das Gesamtfeld E aus der Vektorsumme von E_0 und E_p . Da keine frei beweglichen Ladungen vorhanden sind, führt die Polarisation immer zu einer Feldschwächung.

1. Was passiert, wenn man ein isolierendes Medium in den Kondensator einbringt?

Dielektrikum im Feld
Ein Kondensator erzeugt das elektrische Feld E_0 .

$$U = \frac{1}{Q} \cdot \frac{A}{\epsilon_0} \cdot d \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d}$$

Def.: Kapazität: $C = Q/U$
Dimension: $[C] = [Q]/[U] = C/V$
Einheit: $1 C/V = 1 F$ (Farad)

Wie viel Ladung in einen Kondensator gebracht werden kann, um eine gewisse Potentialdifferenz zu erreichen.

5. Wie ist die Kapazität des Kondensators definiert?

$$U = V_p(z) = d - V_p(z) = 0 = \frac{1}{Q} \cdot \frac{A}{\epsilon_0} \cdot d$$

4. Wie groß ist die Potentialdifferenz U zwischen den beiden Platten?

$$V_p = - \int \vec{E}(z) \cdot \vec{e}_z \cdot dz = \frac{1}{Q} \cdot \frac{A}{\epsilon_0} \cdot z + const$$

3. Wie lautet das Potential V_p im Innenraum des Kondensators?

A... ist die Fläche des Plattenkondensators (eine Plattenoberfläche)
 ϵ_0 ... elektrische Feldkonstante $\frac{N}{m^2}$

$$|\vec{E}| = - \frac{1}{Q} \cdot \frac{A}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

Das Feld steht immer normal auf die Leiteroberfläche und verläuft von der positiv geladen zur negativ geladenen Platte.

In Isolatoren sind die Elektronen an den Atomkern gebunden, d.h. sie können sich nicht frei im Isolator bewegen. Im Normalfall ist der Ladungsschwerpunkt der Elektronen genauso wie der Ladungsschwerpunkt des Kerns im Zentrum des Atoms.

Wird nun ein geladener Körper in die Nähe eines Isolators gebracht, so verschoben sich die Elektronen in die Nähe des geladenen Körpers, sodass die Ladungsschwerpunkte nicht mehr aufeinander liegen. Es entstehen kleinste elektrische Dipole und die Oberfläche des Isolators lädt sich auf.

Polarisation

$$P_e = \frac{V}{U} = p_e$$

3. Wie groß ist das resultierende Feld E im Isolator?

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot A \cdot (Q_0 - Q_p) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \cdot A - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot A \cdot P_\mu \cdot A = E_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot P_\mu$$

4. Was ist die Verschiebungsdichte D und wie lässt sie sich durch E bzw. E_0 ausdrücken?

Def.: Verschiebungsdichte: $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_0 = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E}$

Dimension/Einheit: $\left[\vec{D} \right] = \left[\epsilon_0 \right] \cdot \left[\vec{E}_0 \right] = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{N}{C} = \frac{N \cdot m^2}{C}$

Dielektrische Konstanten

In einen Kondensator wird ein isolierendes Medium eingebracht:

Grund: Durch ein isolierendes Medium kann die Kapazität des Kondensators erhöht werden

1. Was ist die Dielektrizitätskonstante ϵ ?

Wie groß die Polarisationsladungen absolut werden können, hängt von der mikroskopischen Anordnung der Dipole im Dielektrikum ab, und ihre Berechnung ist daher nicht einfach. Es empfiehlt sich daher, eine makroskopische Konstante zu definieren, die die Schwächung des Feldes angibt. Das ist die sogenannte relative Dielektrizitätskonstante ϵ . ϵ ist immer > 1 , ansonsten würde das Feld verstärkt werden:

$$\epsilon = \frac{E}{E_0} \text{ somit im Vakuum gleich 1}$$

Formal gleiche Ausdrücke wie im Vakuum, wenn ϵ_0 durch

Vakuum ϵ_0 ersetzt wird.

$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \tilde{Q}_0$$

Dielektrikum

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot \tilde{Q}_0$$

2. Was ist dielektrische Suszeptibilität χ_e ?

4. Warum ist die dielektrische Suszeptibilität χ_e sehr hoch?

Die Temperatur hat einen großen Einfluss auf die elektrische Suszeptibilität. Bei geringen Temperaturen richten sich alle Dipole bei einem noch so kleinen Feld sofort und ideal in Feldrichtung aus und steigern daher χ beträchtlich. Die Suszeptibilität kann bei geringen Temperaturen sogar gegen unendlich gehen! Geringe Temperatur $\rightarrow \chi_e$ sehr hoch

$$\epsilon = 1 + \chi_e$$

3. Wie hängen ϵ und χ_e miteinander zusammen?

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$$

Die elektrische Suszeptibilität χ_e ist eine Materialkonstante, welche die Fähigkeit zu elektrischer Polarisation in einem eingetragten elektrischen Feld angibt. Sie hängt von den Details der Bindungen im Festkörper, aber auch von äußeren Einflüssen wie Druck und Temperatur ab. Sie ist eine messbare Materialeigenschaft. Hier ist sie eine skalare Proportionalitätskonstante:

Ströme

Stationäre Ströme

Einzelne Ladungen q seien mit einer Dichte n im Raum verteilt.

1. Wie groß ist die Gesamtladung Q in einem Volumen V ?

Gesamtladung in einem Volumen: $Q = n * q * V$

n ... Zahl der Ladungsträger pro Volums Einheit

q ... Ladung

V ... Volumen

2. Wie groß ist die Raumladungsdichte ρ_e ?

$$\text{Raumladungsdichte: } \rho_e = \frac{dQ}{dV} = n * q$$

3. Wie ist der Strom I definiert und wann ist er stationär?

$$\text{Stromstärke: } I = \frac{dQ}{dt}$$

Dimension: $[I] = C/s$

Einheit: $1 C/s = 1 [A]$ Ampere

Die Richtung des Stroms ist die Bewegungsrichtung der positiven Ladungen.

Wenn in ein Volums Element die gleiche Stromdichte ein und wieder austritt nennt man den Strom stationär. Einen stationären Strom kann man sich als eine Anordnung von Ladungen vorstellen, welche sich in die gleiche Richtung mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

$$\text{Bedingung: } I = \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\oint_V \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 \text{ bzw. } \text{div } \vec{j} = 0$$

4. Wie ist die Stromdichte $\vec{j}$ definiert?

$$\text{Stromdichte: } I = \int_A \vec{j} * d\vec{f} \rightarrow \vec{j} = \frac{I}{A}$$

$$\text{Dimension: } [j] = \frac{m}{s}$$

5. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung und warum ist sie wichtig für stationäre Ströme?

Sie stellt stationäre, also zeitlich konstante Bedingungen dar.
Die Masse einer Stromröhre bleibt bei stationären Strömungen konstant (= Prinzip der Massenerhaltung). Das bedeutet also, der in die Stromröhre einfließende Massenstrom ist gleich dem aus der Stromröhre rausfließende Massenstrom.

$$\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 \text{ bzw. } \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Divergenz
Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}$

1. Wie ist die Divergenz von $\vec{F}$ definiert?

Skalarfeld, das an jedem Punkt angibt, wie sehr die Vektoren in einer kleinen Umgebung des Punktes auseinanderstreben. Interpretiert man das Vektorfeld als ein Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quellichte.

Def.: Divergenz

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \cdot \int_{A_i} \vec{F} \cdot d\vec{f}_i = \operatorname{div} \vec{F}$$

skalare Größe

2. Wie lautet der Ausdruck für die Divergenz in kartesischen Koordinaten?

In kartesischen Koordinaten ist die Divergenz als die Summe der partiellen Ableitungen der x, y oder z-Komponente des Vektorfeldes $\vec{F}$ nach jeweils x, y und z.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

3. Wie lautet der Gauß'sche Satz?

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{f}$$

Die Summe der Quellen und Senken innerhalb eines Volumens ist gleich dem Gesamtfluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche des Volumens.

4. Leiten Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik für das E-Feld ab.

Aus

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{\epsilon_0}{I} \cdot \tilde{Q} = \frac{\epsilon_0}{I} \int_V \rho \cdot dV$$

folgt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{I}{\epsilon_0} \cdot \rho$$

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik
(Nicht zu verwechseln mit dem Gauß'schen Satz)

Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld

➔ Aus dem Gauß'schen Gesetz der Elektrostatik wissen wir, dass der Fluss durch die Oberfläche eines Volumens V , in dem eine Gesamtladung Q eingeschlossen ist, $\frac{Q}{\epsilon_0}$ ist.

➔ Die Gesamtladung Q können wir als das Volumenintegral über V über die Raumladungsdichte ρ in V schreiben. Aus dem Gauß'schen Satz ergibt sich dann sofort, dass die Divergenz des E-Feldes gleich $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ist.

Damit haben wir das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik ganz allgemein mit dem Gauß'schen Satz in Zusammenhang gebracht.
Die Beziehung $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ bedeutet, dass die Ladungen die Quellen des E-Feldes sind.
In Raumbereichen, in denen keine Ladungen vorhanden sind, also ($\rho=0$) gilt folglich $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

Rotation

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{F}$

1. Wie ist die Rotation von $\vec{F}$ definiert?

Die Rotation wird für ein Vektorfeld berechnet und ist selbst ein Vektorfeld. Betrachtet man ein infinitesimales Volumen im Vektorfeld, so gibt der Rotationsvektor an wie stark und um welche Drehachse sich das Volumen dreht. Ist die Rotation 0, dann ist das Vektorfeld wirbelfrei.

Def.: Rotation

$$\lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{1}{A_i} \cdot \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{e}_{f_i}$$

Richtung: senkrecht auf jene Ebene, in der die Zirkulation maximal ist.

2. Wie lautet der Ausdruck für die Rotation in kartesischen Koordinaten?

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_z$$

3. Wie lautet der Stokes'sche Satz?

$$\int_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Die gesamte Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}$ innerhalb einer Fläche A entspricht der Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang des Randes L dieser Fläche.

4. Leiten Sie mit Hilfe des Stokes'schen Satzes die Kirchhoffschen Maschenregeln ab.

Kirchhoffsches Gesetz: Maschenregel

Die Summe der Spannungen entlang eines Maschenumlaufs ist null. Das heißt, das Kurvenintegral für beliebig in sich geschlossene Randkurven liefern den Wert null.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

Da das E-Feld ein Gradientenfeld ist, wissen wir, dass das Integral entlang eines geschlossenen Weges von $\vec{E}$ in $\vec{E}$ gleich null ist. Gemäß dem Stokes'schen Satz bedeutet das, dass die Rotation von $\vec{E}$ ebenfalls gleich null ist, wie im Roten Kasten gegeben. Daher ist das Elektrostatistische Feld $\vec{E}$ wirbelfrei, was ebenfalls Konsequenzen für Leiternetzwerke hat.

Kirchoffsche Gesetze und Leiternetzwerke
Gegeben ist ein Netzwerk aus elektrischen Leitern.

1. Wie lautet die Kirchhoffsche Knotenregel für Stationäre Ströme und wie kann diese auf den Gauß'schen Satz zurückgeführt werden?

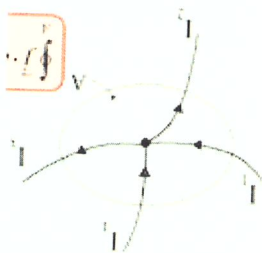
Kirchhoffsches Gesetz: Knotenregel

Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist Null.
Zufließende Ladung = abfließende Ladung

$$\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{f} = \sum_i \oint_{A_i} \vec{j} \cdot d\vec{f} = \sum_i I_i = 0$$

Zusammenhang mit Gauß'schen Satz:

$$\int_V \text{div } \vec{F} \cdot dV = \oint_A \vec{F} \cdot d\vec{f}$$



2. Wie lautet die Kirchhoffsche Maschenregel für Stationäre Ströme und wie kann diese auf den Stokes'schen Satz zurückgeführt werden?

Kirchhoffsches Gesetz: Maschenregel

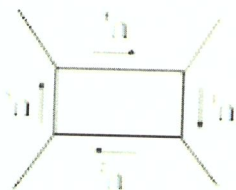
Die Summe der Spannungen entlang eines Maschenumlaufs ist null.

Das heißt, das Kurvenintegral für beliebig in sich geschlossene Randkurven liefern den Wert null.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i U_i = 0$$

Zusammenhang mit Stokes'schen Satz.

$$\int_A \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{f} = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



3. Wie lautet das Ohm'sche Gesetz?

Das ohmsche Gesetz besagt: Die Stärke des durch ein Objekt fließenden elektrischen Stroms ist proportional der elektrischen Spannung.

Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$

U = Potentialdifferenzen [V]
 R = Widerstand [Ω]
 I = Stromstärke [A]

oder

$$\vec{j} = \sigma_e \cdot \vec{E} \dots \text{Ohm'sches Gesetz}$$

$\sigma_e \dots$ spezifische Leitfähigkeit

$$\sigma_e = \frac{ne^2\tau}{2m}$$

Elektrische Netzwerke

Gegeben ist ein Netzwerk aus Leitern und Widerständen.

1. Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R_{ges} zweier in Serie geschalteter Widerstände R_1 und R_2 .

Die Gesamtspannung beträgt

$$U = U_1 + U_2 = I R_1 + I R_2$$

$$U = R_{ges} I$$

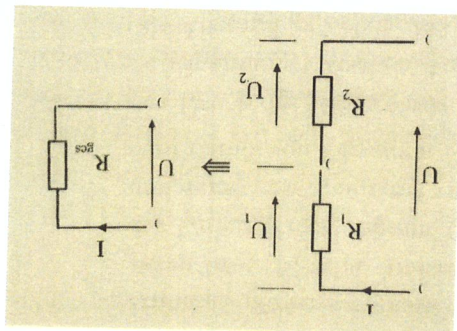
$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

Allgemein:

$$R_{ges} = \sum_i R_i$$

oder, für die Leitwerte:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$



Ein Kondensator besitzt also die Kapazität 1F, wenn sich bei einer angelegten Spannung von 1V eine Ladung von 1C auf dem Kondensator befindet.

Dimension: $[C] = [Q]/[V] = C/V$
 Einheit: $1 \frac{C}{V} = 1F(\text{Farad})$

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Bei einem Plattenkondensator hängt die Kapazität davon ab, wie groß die Platten sind, welchen Abstand sie voneinander haben und welcher Stoff sich zwischen ihnen befindet. Für die Kapazität eines solchen Plattenkondensators gilt:

Q... gespeicherte Ladung
 U... angelegte Spannung

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die Kapazität C bestimmt, welche Ladungsmenge bei vorgegebener Spannung gespeichert wird.

3. Wie ist die Kapazität eines Kondensators definiert?

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

oder, für die Leitwerte:

$$G_{ges} = \sum_i G_i$$

Allgemein

$$\frac{R_{ges}}{U} = \frac{R_1}{U} + \frac{R_2}{U}$$

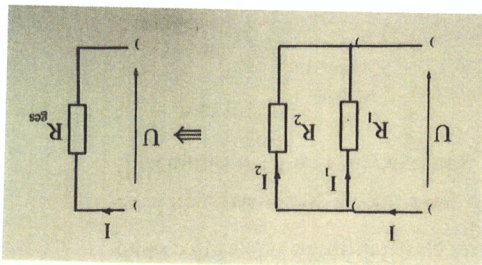
$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Der Gesamtstrom folgt aus

2. Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R_{ges} zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 .



Elektrische Leitfähigkeit

An einem Leiter liegt eine Potentialdifferenz U an, die ein Feld $\vec{E}$ im Leiter erzeugt.

1. Wie hängen die Stromdichte $\vec{j}$ und $\vec{E}$ miteinander zusammen?

$$\vec{j} = \sigma_e \cdot \vec{E} \dots \text{Ohm'sches Gesetz}$$

$\sigma_e \dots$ spezifische Leitfähigkeit

$$\sigma_e = \frac{ne^2\tau}{2m}$$

2. Wie ist die elektrische Leitfähigkeit σ_e definiert und wie kann sie im Rahmen des Drude Modells berechnet werden?

$$\text{Spezifische Leitfähigkeit: } \sigma_e = \frac{ne^2\tau}{2m}$$

m = Masse

$ne = \frac{dQ}{dV}$ (Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit)

τ = mittlere Stoßzeit

Modell der Elektronenbewegung im Leiter – Ansatz Drude Modell:

Ein zunächst ruhender Ladungsträger wird im Leiter durch ein elektrisches Feld beschleunigt. Diese beweglichen Ladungsträger treffen nach einer mittleren Stoßzeit τ auf Hindernisse, werden, vereinfachend vorausgesetzt, auf $v=0$ abgebremst und dann wieder beschleunigt.

Berechnung der mittleren Geschwindigkeit über die Arbeit und die Beschleunigung aus der Kraftformel.

$$\frac{dQ}{dV} = n \cdot e$$

Elektron im Leiter
nach mittlerer

$$dW = e \cdot dU = e \cdot E \cdot dx = F \cdot dx$$

$$F = e \cdot E = m \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

$$v_{max} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau} = \frac{m}{e} \cdot E \cdot \tau \rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{I}{e} \cdot \frac{2m}{e} \cdot E \cdot \tau}$$

Zeitliches Mittel der Stromdichte:

$$j = \frac{I}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dx} \cdot \bar{v} = \frac{1}{A} \cdot \frac{2m}{e} \cdot \frac{I}{n \cdot e^2 \cdot \tau} \cdot E$$

$$\text{Def.: spezifische Leitfähigkeit } \sigma_e = \frac{2m}{n \cdot e^2 \cdot \tau}$$

Herleitung:

Kraftformeln gleichsetzen

$$\vec{F} = q * \vec{E} \text{ und } \vec{F} = m * \vec{a}$$

$$\rightarrow q * \vec{E} = m * \vec{a}$$

Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{q}{m} * \vec{E}$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \frac{q}{m} * \vec{E} * t = \text{mittlere Geschwindigkeit}$$

Es gilt:

$$\frac{dV}{dt} = nu$$

Stromdichte

$$j = \frac{I}{A} = \frac{A dt}{1 dQ dx} = \frac{A dx dt}{1 dQ dx}$$

$$\rightarrow j = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = v \frac{dV}{dx}$$

$$\rightarrow nuv = nuq * \frac{1}{q} \frac{dV}{dt} * t$$

$$j = \frac{nuq^2 \tau}{2m} * \vec{E}$$

$$j = \sigma_e * \vec{E} \dots \text{Ohm'sches Gesetz}$$

$\sigma_e \dots$ spezifische Leitfähigkeit (material-spezifisch)

3. Was ist die mittlere Stoßzeit τ und wie beeinflusst sie die elektrische Leitfähigkeit?

Die mittlere Stoßzeit τ ist die Zeit durchschnittliche Zeit, bis frei bewegliche Ladungsträger bei ihrer Bewegung auf Hindernisse wie z.B. andere Atome, Elektronen treffen.

Als Teil des Zählers der elektrischen Leitfähigkeit bedeutet dies, dass wenn τ größer wird, die Leitfähigkeit auch größer wird, da der Zeitabstand zwischen den Zusammenstößen mit Hindernisse vergrößert wird.

4. Was ist der spezifische Widerstand ρ_e ?

$$\text{Spezifischer Widerstand: } \rho_e = \frac{1}{2 \cdot m} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{1}$$

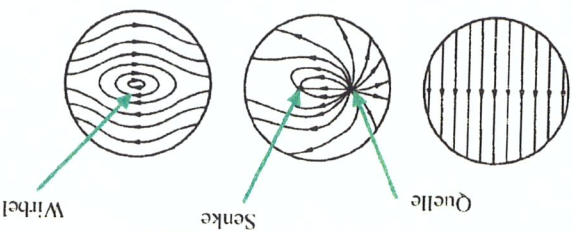
Der spezifische Widerstand (kurz für spezifischer elektrischer Widerstand oder auch Resistivität) ist eine temperaturabhängige Materialkonstante. Er wird vor allem zur Berechnung des elektrischen Widerstandes einer (homogenen) elektrischen Leitung oder einer Widerstands-Geometrie genutzt.

Vektorfelder

Gegeben sei ein beliebiges Vektorfeld $\vec{F}$.

1. Wie berechnet man die Divergenz und die Rotation von $\vec{F}$ in kartesischen Koordinaten?

In kartesischen Koordinaten lauten diese Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \text{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{e}_z \\ \text{grad} \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$


2. Was bedeuten Quellen oder Senken für die Divergenz von $\vec{F}$?

Quelle:

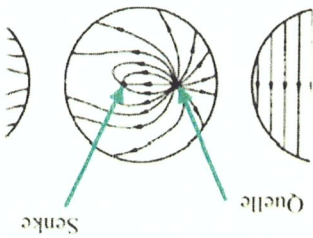
$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) > 0$$

Senke:

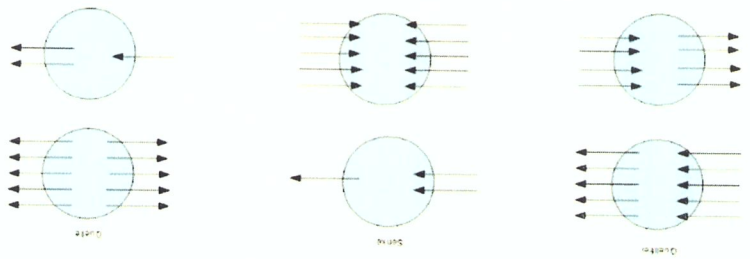
$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) < 0$$

➔ Divergenz positiv, es fließt also mehr hinein als hinaus

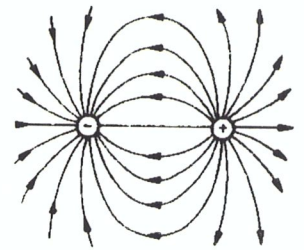
➔ Divergenz negativ, es fließt mehr hinein als hinaus



Senk- und Quellfrei:
 $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = 0$



3. Skizzieren Sie ein Vektorfeld $\vec{F}$, welches Quellen und Senken enthält.

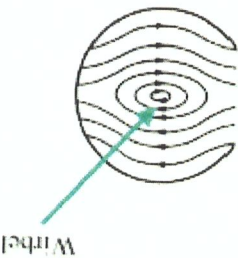


Quellfeld
 Feldlinien beginnen in Quellen
 und enden in Senken

4. Was bedeutet eine nicht verschwindende Zirkulation für die Rotation von $\vec{F}$?

Gilt für die inneren Feldvektoren, die in Kreisform verlaufen:
Sind immer parallel und in die gleiche Richtung

→ Wegintegral über $\vec{F}$ entlang des Weges daher nicht 0 und somit ist auch die Rotation nicht null



5. Skizzieren Sie ein Vektorfeld $\vec{F}$, welches eine nicht verschwindende Zirkulation aufweist.

Siehe oben „Wirbel“

6. Was sind die Quellen des elektrostatischen Feldes $\vec{E}$?

Die Feldlinien eines von Ladungen erzeugten elektrischen Feldes beginnen an positiven Ladungen (oder im Unendlichen) und enden an negativen Ladungen (oder im Unendlichen). Ein solches Feld wird als Quellenfeld bezeichnet.

Abgeleitet durch das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik:

Die Beziehung $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ bedeutet, dass die Ladungen die Quellen des $\vec{E}$ -Feldes sind. In Raumbereichen, in denen keine Ladungen vorhanden sind, also $\rho=0$ ist, gilt folglich $\text{div } \vec{E} = 0$.

Physikalische Größe	Name	Symbol	Definitionsgleichung
Ebene Winkel	Radian	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m/m}$
Räumlicher Winkel	Steradian	sr	$1 \text{ sr} = 1 \text{ m}^2/\text{m}^2$
Frequenz	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$
Kraft	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$
Druck	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
Mechanische Spannung			
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$
Leistung	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ VA}$
Elektrische Ladung	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
Elektrische Spannung	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A}$ $1 \text{ m}^2 \text{ kg}/(\text{As}^3)$
Elektromagnetische Kraft			
Elektrische Kapazität	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ As/V} = 1 \text{ C/V}$
Elektrische Widerstand	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$
Elektrischer Leitwert	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \text{ A/C}$
Induktionsfluss	Weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$
Magn. Fluss			
Magn. Induktion	Tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$
Magn. Flussdichte			
Elektr. Induktivität	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$
Lichtstrom	Lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$
Beleuchtungsstärke	Lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$
Aktivität einer radioaktiven Substanz	Becquerel	Bq	$1 \text{ Bq} = 1/\text{s}$
Energiedosis	Gray	Gy	$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$