Theorie und Beobachtung des Erdschwerefeldes

Stand: Sommersemester 2011
keine Garantie auf Richtigkeit

1. Bezugssysteme

Inertialsystem: nicht rotierend
nicht beschleunigt
Trägheitsgesetze sind uneingeschränkt gültig
ruhend oder in gleichmäßiger Bewegung
Gültigkeit des Newtonschen Grundgesetzes (F = m*a)

Quasi-Inertial: nicht rotierend
Ursprung ist beschleunigt
Bsp.: Erde um die Sonne

Realisierung des Inertialsystems durch Koordinaten von Radioquellen: ICRS

Nicht-Inertial: mit Erde fest verbundene Systeme

Rotierendes System: besitzt Scheinkräfte (Fliehkraft und Corioliskraft)

Corioliskraft: abhängig von Geschwindigkeit und Richtung des Massenpunktes
tritt nur auf, wenn sich Massenpunkt relativ zum bewegten Bezugssystem bewegt, also nicht nur im bewegten System „ruht“
ist Null, wenn relative Bewegung parallel zur Drehachse ist
bewirkt schräge Abweichung von der Drehachse

Bsp. Foucaultsches Pendel: Schwingungsebene des Pendels bleibt im inertialen Raum stabil, dreht sich aber im rotierenden System im Uhrzeigersinn auf der Nordhalbkugel und gegen den Uhrzeigersinn auf der Südhalbkugel.
Am Äquator dreht sich Schwingungsebene nicht, weil Vertikalkomponente der Erddrehung =0 ist. ($\omega_v = \omega sin\varphi$)
An den Polen ist Drehung am stärksten, weil Vertikalkomponente der Erddrehung maximal ist.

bewirkt, dass Objekte auf der Nordhalbkugel nach rechts/auf der Südhalbkugel nach links abgelenkt werden

Fliehkraft: abhängig von der Lage des Massenpunktes
bewirkt radiale Abweichung von der Drehachse
ist Null an den Polen, maximal am Äquator (1/3 d. Gravitation)

2. Das Potential der Schwere

2.1. Die Kräftefunktion

Schwere ist Resultierende aus Gravitation und Fliehkraft

Potential der Schwere (=Kräftefunktion W) ist die Summe aus Potential der Gravitation und Potential der Fliehkraft. Bestimmung von W ist eine Hauptaufgabe der Geodäsie.

$W = V + \phi = G\iiint_E \frac{\rho}{l}\, dv + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$

Einheit d. Schwerebeschleunigung: Gal (m/s^2)

Schwerepotential gehorcht im Innenraum der Erde der Poisson-Gleichung. Das Schwerepotential ist samt seinen ersten Ableitungen im Innen- und Außenraum eindeutig, endlich und stetig. Die wichtigste Unstetigkeitsfläche ist die physische Erdoberfläche, mit einem Dichtesprung von $\rho=2{,}7 g/cm^3$ (mittlere Dichte der Erdkruste) auf $\rho=0{,}0013 g/cm^3$ (Dichte der Luft).

Schwere ist am Pol größer als am Äquator.

2.2. Die Niveauflächen

Niveauflächen können nur stückweise analytisch dargestellt werden und sind durch ihre beiden Differentialformen (1. und 2. Fundamentalform) stückweise bestimmt.
Fundamentalgrößen aus den 1. und 2. Ableitungen des Potentials bestimmbar.

Mittlere Krümmung: $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Gaußsche Krümmung: $K = \frac{1}{R_1 R_2}$

Gleichung von Bruns: $2Hg = 4\pi G\rho(x,y,z) - 2\omega^2 + W_{zz}$
…erlaubt Bestimmung der mittleren Krümmung aus Schweremessung

Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 können durch Gleichung von Bruns oder aus den Fundamentalgrößen bestimmt werden.

W_{zz} wird mit Gravimeter bestimmt, W_{xy}, W_{yz}, W_{zx} und $(W_{yy}-W_{xx})$ mit der Drehwaage von Eötvös oder mit Gradiometern.

Horizontalgradient folgt aus W_{zx} und W_{zy}

Einheit für Gradienten: 1 Eötvös = $1E = 1*10^{-9} s^{-2}$ (beschreibt Änderung der Schwere)
Merkregel: 10mGal auf 10km = 10E

Lotlinien stehen normal auf die Niveauflächen und sind schwach gekrümmte Raumkurven.
Krümmung der Lotlinie entspricht eigentlich einer Torsion (Spirale)- Krümmung nur in einer Ebene, wenn Erde homogen wäre.

2.3. Lotkrümmung – orthometrische Korrektur

Differenz zwischen orthometrischen Höhen setzt sich aus dem reinen Nivellementergebnis dn und der orthometrischen Korrektur d(OC) zusammen: dH = d(OC) + dn

Orthometrische Höhe: Abstand entlang der gekrümmten Lotlinie zwischen einem Punkt auf der Erdoberfläche und dem Geoid.
H = geopotentielle Kote/mittlere Schwere entlang der Lotlinie

Misst man entlang der Erdoberfläche zwischen zwei Punkten mehrere Schwerewerte g_n und bildet daraus das Mittel $\bar{g}$, so gibt das Verhältnis g_n: $\bar{g}$ an, wie stark die Lotlinie gekrümmt ist.

Die Lotkrümmung in Breite und Länge entspricht der Änderung der orthometrischen Korrektur in x- (Nord-Süd) bzw. y-Richtung (Ost-West).

3. Theorie der Gleichgewichtsfiguren

3.1. Einleitung

Möglichkeiten, die Figur der Erde festzulegen:

1. homogene bzw. heterogene Gleichgewichtsfiguren oder das Niveauellipsoid

Niveauellipsoid: keine Gleichgewichtsfigur; Oberfläche ist Niveaufläche; nähert Figur der Erde und Schwerefeld gut an; rotiert; konstanter Potentialwert auf der Oberfläche

hydrostatisches Gleichgewicht:

- Summe aller angreifenden Kräfte ist Null -> Flächen konstantem Potential (=Niveauflächen) sind auch Flächen gleichen Drucks
  $\rho g + p = 0 \rightarrow \text{grad}P = -\rho \text{grad}W \rightarrow dP = \rho dW$; wenn $dP = 0$, dann auch $dW = 0$
- keine Bewegung von Teilchen gegeneinander (Beschleunigung = 0)
- auf jedes Flächenelement im Inneren wirken zwei entgegengesetzte Kräfte (Gravitation und Fliehkraft), die gleich groß sind uns sich somit ausgleichen
- für Gleichgewichtszustand ist es notwendig, dass Niveauflächen auch Flächen gleicher Dichte sind
- Erdinneres ist im hydrostatischen Gleichgewicht
- Wäre Kruste auch im Gleichgewicht: Regularisierung
- regularisierte Erde wäre optimale Normalfigur
- einzige Gleichgewichtsfigur im Ruhezustand: Kugel; für kleine Rotationsgeschwindigkeiten: Sphäroide/Rotationsellipsoide

Druck und Dichte nehmen zum Zentrum hin zu!

2. Niveausphäroide bzw. Geoid

Geoid verläuft in Höhe des Meeresniveaus; ist nur in kleinsten Bereichen durch einfache analytische Funktion beschreibbar; ist Niveaufläche des wahren Schwerepotentials

3. Telluroid

entspricht etwa der Erdkruste und ist für Messungen direkt zugänglich; trotz Glättungsalgorithmen keine einfache mathematische Behandlung möglich

Sätze für Gleichgewichtsfiguren:

1. Schwerpunkt des Körpers liegt auf der Rotationsachse
   (Schwerpunkt darf ruhen oder sich geradlinig gleichförmig bewegen; keine Rotation)

2. die durch den Schwerpunkt senkrecht durch die Rotationsachse gehende Ebene ist Symmetrieebene der Gleichgewichtsfigur

3. Eine ruhende Gleichgewichtsfigur besteht aus einem System konzentrischer Kugelschalen

4. Die Schwerkraft kann nur in Punkten der Symmetrieebene verschwinden
   (dies ist der Fall am Äquator in einer Höhe von ca. 42 000km, Gravitation = Fliehkraft; geostationäre Satelliten)

5. aus einer Gleichgewichtsfigur folgen unendlich viele andere, wenn man die Dichten mit einer Konstanten k^2 und die Winkelgeschwindigkeit mit k multipliziert

6.es gibt eine obere Schranke für die Winkelgeschwindigkeit (Schranke von Poincare; abhängig von Dichte)

4. Die Differentialgleichung von Clairaut

4.1. Herleitung

- ist Grundgleichung der Theorie der Gleichgewichtsfiguren
- homogene Differentialgleichung 2.Ordnung
- beschreibt die Abplattung der inneren Niveauflächen als Funktion des Abstandes vom Zentrum und des dazugehörigen Dichtegesetzes
- verwendet Hilfsgröße mittlere Dichte D
- zur Lösung sind 2 Anfangs- oder Randbedingungen notwendig: Abplattung f und Differentialquotient df/dq der äußersten Schale
- Ergebnis: df/dq > 0 heißt: die Abplattung der inneren Niveauflächen nimmt mit wachsender Tiefe ab; gilt für Erdoberfläche und gesamten Innenraum der heterogenen Erde

Je weiter ich von Erde weggehe umso mehr werden die Äquipotentialflächen kugelförmig
Im Zentrum sind Flächen wieder annähernd kugelförmig
Abplattung ist an der Erdoberfläche am größten
Je mehr Masse im Zentrum ist, umso eher sind die Flächen kugelförmig
Je mehr Masse dezentriert ist, umso mehr Abplattung -> ellipsenförmig

- bei fiktiver homogener Erde vereinfacht sich die Gleichung durch D=ρ und es gilt: df/dq = 0 bzw. f=const. d.h. die inneren Äquipotentialflächen der elliptischen Gleichgewichtsfigur sind eine Schar ähnlicher Ellipsoide mit der gleichen Abplattung

4.2. Trägheitsmoment

Bei Berechnung des polaren Trägheitsmoments der Erde, integriert man die Kugel nach den Kugelkoordinaten Länge, Poldistanz und Radius. Das Integral über den Radius ist vorerst unlösbar, da dazu Kenntnis der Dichteverteilung im Erdinneren benötigt wird.
Abhilfe durch Radau-Transformation: Einführung eines Parameters η und Verwenden der Beziehung zwischen der mittleren Dichte D der Kugel und der wahren Dichte ρ an der Oberfläche

somit kann Trägheitsmoment ohne Kenntnis des Dichtegesetzes ausgewertet werden.

beruht auf Annahmen: - Erde ist im hydrostatischen Gleichgewicht
- Terme 2. Ordnung in der Abplattung wurden vernachlässigt

4.3. Schlussfolgerung

dynamische Abplattung H lässt sich aus Präzession herleiten
geometrische Abplattung f kann aus H und m berechnet werden/ f= 1:298,26
m = Fliehkraft am Äquator/Gravitation am Äquator

berechnete geometrische Abplattung weist Differenz zur Abplattung, die aus Satellitenbeobachtungen gewonnen wird, auf. Diskrepanz weil Erde nicht im hydrostatischen Gleichgewicht ist oder weil unser angenommenes Dichtegesetz nicht stimmt.

5. Die Ellipsoide von MacLaurin und Roche

5.1. Das Modell von MacLaurin

Rotationsellipsen mit konstanter Dichte- und Massenverteilung im Inneren

Gravitationspotential des Ellipsoids enthält Koeffizienten A_1, A_2, A_3, die mithilfe von Hilfsgrößen η(2.Exzentrizität, Oberflächenwert) und e (lineare Exzentrizität) ausgewertet werden. Für innere Punkte und die Oberfläche sind diese Koeffizienten Konstanten. Bei Rotationsellipsoid $A_1 = A_2$

Für äußere Punkte wird der Parameter λ>0 verwendet und die Koeffizienten sind keine Konstanten mehr. (λ=0 entspricht der Oberfläche und die Formeln vereinfachen sich wieder)

Einfluss der Fliehkraft, die nur in x- und y-Richtung wirkt, berücksichtigen, indem A_1 und A_2 ein Zusatzglied hinzugefügt wird.

Die inneren Niveauflächen sind konzentrische und ähnliche Ellipsoide. Ihre Exzentrizität ist aber kleiner als die der Oberfläche. Ihre 2.Exzentrizitäten sind konstant.

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit erhöht, wächst die Niveaufläche im Innenraum $\bar{\eta}$ an, bis schließlich $\bar{\eta}$= η. In diesem Fall ist die Oberfläche Niveaufläche und das Rotationsellipsoid ist Gleichgewichtsfigur.
Für $\bar{\eta}$ = η findet man die MacLaurin-Bedingung:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{(3+\eta^2)\tan^{-1}(\eta - 3\eta)}{\eta^3}$$

…damit homogenes Ellipsoid zu einer Gleichgewichtsfigur wird

Die äußeren Niveauflächen sind keine Ellipsoide mehr, da die Koeffizienten nicht konstant sondern Funktionen der Koordinaten sind.

MacLaurin-Bedingung zeigt, dass Dichte, Abplattung und Winkelgeschwindigkeit nicht willkürlich gewählt werden können, wenn das Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein soll. Gibt man 2 Parameter vor, ist der dritte bestimmt.
Setzt man in die Bedingung für ω, ρ und η die Werte der Erde ein, sieht man, dass die Bedingung nicht erfüllt ist → Erde ist nur fast Gleichgewichtsfigur.

Für η = f= 0 → Ω=0
Für η =∞, f = 1 → Figur ist eine Scheibe
Gleichzeitige Vorgabe von ω und ρ nur unter Beachtung von Ω_{max} = 0,22467… möglich.
Es gibt keine Grenze für ω, wenn ρ genügend groß ist.
Die meisten Planeten sind nur schwach abgeplattet, Glieder ab f² können vernachlässigt werden

Durch Ableiten des Potentials des homogenen Rotationsellipsoids kann man die Schwere bilden; gilt auch für die inneren Niveauflächen. Da die A_i konstant sind, übt eine von 2 ähnlichen Ellipsoiden gebildete homogene Schale keine Anziehung auf Punkte ihres Hohlraums aus.

Schwereabplattung β: Unterschiede des Erdschwerefeldes, aufgrund der Abplattung der Erde um den Faktor f. Schwerkraft ist an den Polen größer als am Äquator, weil die Fliehkraft auf der Erdachse verschwindet.
$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_Ä}{\gamma_Ä} = \frac{f}{1-f}$ (Schwere am Pol – Schwere am Äquator)/Schwere am Äquator

Nach MacLaurin sind Körper im hydrostatischen Gleichgewicht Rotationsellipsen, aber nur dann, wenn MacLaurin-Bedingung erfüllt ist.

5.2. Modell von Roche
Gesamte Masse in einem Punkt (Zentrum) des Rotationskörpers vereinigt. Oberfläche ist masselose Haut.

Man definiert Parameter κ, abhängig von G, M, ω:

κ < 1: Hülle (Niveaufläche) ist nicht mehr geschlossen. Der Fliehkraftterm überwiegt den Gravitationsterm und es folgen Zylinderflächen als Niveauflächen mit den Achsen in der z-Achse. In der Nähe von κ=1 treten Einschnürungen an den Zylinderflächen auf.

κ ≥ 1: Niveauflächen sind nahe am Massenpunkt Kugeln. Im Grenzfall fließen beide Flächenscharen längs eines bestimmten Äquatorkreises zusammen. Dort halten sich Fliehkraft und Gravitation die Waage. (Abb.16!)

Rotiert der Massenpunkt langsam, so ist das Sphäroid schwach abgeplattet.

Mindestabplattung eines langsam rotierenden Himmelskörpers: $f \geq \frac{1}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_{\ddot{A}}} = \frac{1}{2}\varepsilon$

$f_{Roche} < f_{Planet} < f_{MacLaurin}$ Körper halten sich eher an MacLaurin als an Roche!

6. Das Niveausphäroid von Bruns

Entsteht durch Abbrechen der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials nach Grad 2
allgem. Niveausphäroid: Kugelfunktionsentwicklung bis zu kleinem Grad
gibt Massenverteilung der Erde wieder

Kugelfunktion nach Laplaceschen Ypsilon entwickeln, man erhält Koeffizienten A_{nm} und B_{nm}.

Vereinfachungen durch:
Glieder erster Ordnung sind Koordinaten des Schwerpunktes, legt man also den Ursprung des Koordinatensystems in den Massenschwerpunkt, so verschwinden diese Glieder.

Weiters werden Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen A(x), B(y), C(z) und Deviationsmomente(= Drehmomente der Zentrifugalkräfte um die Achsen) definiert: F, G, H.

Legt man die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen (= orthogonale Achsen durch den Schwerpunkt, bezüglich derer die Trägheitsmomente Extremwerte annehmen), so verschwinden die Deviationsmomente um diese Achsen.

Da Rotationsachse z nahezu mit Achse des größten Trägheitsmoments C zusammenfällt → F, G = 0

Ergebnis in kartesischen Koordinaten:

$$V = \frac{GE}{l} + \frac{G}{2l^5}[(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2]$$

In jeder Kugelfunktionsentwicklung des Potentials verschwinden alle harmonischen Funktionen 1.Grades und jene vom 2.Grad und 1.Ordnung → verbotene Glieder

Bei Rotationssymmetrie A=B

In der Satellitendynamik andere Form: statt A=J, B=K wobei J,K = Massenfunktionen

Bricht man Entwicklung nach dem 2.Grad ab und setzt Potential konstant, so hat man Gleichung einer Niveaufläche = Niveausphäroid von Bruns = Fläche 14.Ordnung
Bricht man nach 4.Grad ab: Helmertsches Niveausphäroid

Theorem von Clairaut: Summe aus geometrischer Abplattung und Schwereabplattung ist gleich dem 5/2-fachen Verhältnis aus Fliehkraft zu Schwere am Äquator. Durch Kenntnis von γ_P und $\gamma_{\ddot{A}}$ kann also die Abplattung berechnet werden.

$$f + \beta = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GE} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_Ä}$$

7. Das Niveauellipsoid

Meridianschnitt des Brunschen Niveausphäroids weicht nur um max. 12m von einer Ellipse ab → Ellipsoid ist einfache Normalfigur der Erde
Vorteil: einfache Herleitung von geschlossenen Formeln; klare Definition des theoretischen Erdschwerefelds

Rotationsellipsoid wird als Niveaufläche des normalen Schwerefelds angenommen. Ellipsoid soll Normalfigur des Geoids sein, welches selbst eine Niveaufläche des tatsächlichen Schwerefelds ist.
Wichtig: „normales" Potential U soll vollständig und eindeutig beschrieben werden. Dies gelingt durch Vorgabe der Gesamtmasse E und Annahme des Ellipsoids als Niveaufläche.
Dichteverteilung innerhalb ist unwichtig, denn Bestimmung des Niveauellipsoids gelingt durch Satz von Stokes und Poincare.
Satz von Poincaré-Stokes: Rotiert ein Körper mit der Gesamtmasse M mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und ist S eine Niveaufläche seines Schwerefelds, welche die gesamte Masse einschließt, so ist das Schwerepotential im Außenraum von S eindeutig durch M, ω und die S definierenden Parameter bestimmt. Eine harmonische Funktion außerhalb der Fläche S, also das Schwerepotential, ist eindeutig durch 4 Parameter bestimmt.

4 Parameter für das Niveauellipsoid:

Äquatorradius	a	
geoz. Gravitationskonstante	GE	
Dynamischer Formfaktor	J_2	←enthält Abplattung
Winkelgeschwindigkeit	ω	

Die Parameter werden aus Satellitenbeobachtungen gewonnen.

Tatsächlich gibt es aber keine heterogene Massenverteilung deren freie Oberfläche oder äußere Niveaufläche ein Ellipsoid ist.

Formel für theoretische Schwere am Niveauellipsoid von C.Somigliana; hängt ab von Schwere am Äquator/Pol, geograph. Breite

Wählt man große Halbachse a so, dass das Integral der Geoidundulationen über die Erde verschwindet (gleiches Volumen von Niveauellipsoid und Geoid), so kann dieses Ellipsoid mittleres Erdellipsoid und Repräsentant des Erdkörpers genannt werden.

Anforderungen an den Erdrepräsentanten:

1. soll Niveaufläche der Erde gut annähern, also dass der Störterm $T = W_{wahr} - U_{theoretisch}$ sehr klein ist → Niveausphäroid
2. soll mathematisch einfach handhabbar sein → Rotationsellipsoid, Gleichgewichtsfigur
3. soll homogen und unabhängig von Massenverteilung sein → MacLaurin-Ellipsoid
4. soll Dichte, Volumen und ω der Erde haben

Ergebnis: homogenes Rotationsellipsoid nicht im Gleichgewicht

Undulationen befinden sich zwischen +/- 100m, aber in Summe über die ganze Erde sind sie Null.

Wir suchen ein W_0, das gleich U_0 ist und wenn wir dieses gefunden haben, haben wir das Geoid gefunden.

8. Das anormale Schwerefeld

Die Theorien von Bruns und Stokes

Theorem von Bruns: $N = \frac{T_P}{\gamma_Q}$

Geoidundulation = Störpotential am Geoid/theoretische Schwere am Ellipsoid

Theorie von Bruns: Vergleich der Niveaufläche $W=W_0$ mit dem Niveauellipsoid desselben Potentialwertes $U=W_0$. U ist Näherung von W: W=U+T

Differentialgleichung der Physikalischen Geodäsie:

$$-\left(\frac{\delta T}{\delta n}\right) + \frac{1}{\gamma_Q}\left(\frac{\delta \gamma}{\delta n}\right) T_P = \left(g_P - \gamma_Q\right) = \Delta g$$

..ist eine 3.Randwertaufgabe weil Potential und Ableitung des Potentials kombiniert sind

Δg = scheinbare Schwereanomalie; nur entlang des Geoids bekannt und somit Randbedingung; reicht aber nicht zur Berechnung von T aus
werden aus Beobachtungen gewonnen; können aber auch aus Störpotential berechnet werden

wäre Δg im ganzen Raum bekannt, könnte Differentialgleichung gelöst werden und die Undulationen könnten somit berechnet werden

Störpotential ΔT außerhalb des Geoids = 0 weil alle Massen durch Schwerereduktion entfernt werden

Schwereanomalien können nach Kugelfunktion entwickelt werden, was wiederum eine Darstellung des Störpotentials ist.
Mit dieser Darstellung und dem Theorem von Bruns bekommt man eine Kugelfunktionsentwicklung für die Geoidundulation, auf Basis der Schwereanomalie = Stoke'sches Integral.
→ Schwereanomalien, Störpotential und Geoidundulation kann man ineinander umrechnen

Stoke'sches Integral S(Ψ) hängt vom sphärischen Abstand Ψ der Schwereanomalie vom Aufpunkt, für den ich N berechnen will, ab. S(Ψ) hat bei Ψ=0 eine Unstetigkeit, die aber durch die Helmertfunktion F(Ψ) behoben wird. Es folgt: $N = \frac{1}{4\pi}\frac{R}{\gamma}\iint_\sigma S(\psi) * \Delta g * d\sigma$

…Undulation ist also abhängig von sphärischem Abstand, Schwereanomalie, Schwere, Radius

Bei praktischer Berechnung einer Geoidundulation ersetzt man Integral von Stokes dσ durch ein endliches Kompartiment q, entweder durch Kreisringsektoren oder ein geographisches Netz (1°x1°). Für jedes Kompartiment bestimmt man einen Mittelwert der Anomalie Δg.

Eigentlich müsste man zur Lösung des Stokes-Integrals Schwereanomalien in allen Punkten der Erde kennen, was aber nicht möglich ist. Man beschränkt sich daher auf einen 30-40km großen Bereich und interpoliert gegebenfalls für Punkte ohne Schweremessung.

Gravimetrische Lotabweichungen

Absolute Lotabweichung: Winkel zwischen der Lotrichtung am Geoid und der Ellipsoidnormalen des mittleren Erdellipsoids. Besitzt Nord-Süd ξ und Ost-West-Komponente η

$\xi = \varphi_A - \varphi_G$ astronom.Breite – geodät. Breite
$\eta = (\lambda_A - \lambda_G)\cos\varphi$ astronom.Länge – geodät.Länge

Mithilfe der Vening Meinesz Funktion (= $\frac{dS(\psi)}{d\psi}$) können aus den Schwereanomalien die Lotabweichungskomponenten berechnet werden (=gravimetrische Lotabweichungen).

$$\varepsilon = -\frac{dN}{ds}$$

..Änderung der Geoidundulation in Richtung des maximalen Gradienten

Dort, wo eine große Masse vorhanden ist, nimmt die Undulation zu, das gravimetrische Lot weicht aber in die entgegengesetzte Richtung aus.

Astro-geodätische Lotabweichungen
In Ö wurden 700 astronomische Lotabweichungen gemessen, die über den Weg integriert Undulationsdifferenzen liefern (Umkehrung der ε-Formel).
Diese LA wurden durch astrogeodätische Methoden (=Bestimmung der Zenitrichtung vor dem Sternenhintergrund) bestimmt.

Zusammenfassung: Lotabweichungen können aus gemessenen Schwereanomalien gewonnen werden. Mittels der Stokeschen Integralgleichung können aus Schwereanomalien auch direkt Geoidundulationen berechnet werden.

9.Schwerereduktionen, Isostasie

9.1. Schwerereduktionen

Zur Bildung von Schwereanomalien Δg benötigt man Randwerte der Schwere auf dem Geoid. Somit muss die an der Erdoberfläche gemessene Schwerebeschleunigung mittels geeigneter Modelle auf das Geoid verlagert werden (=downward continuation).

Wesentlichsten Schwerereduktionsverfahren:

a) Freiluftreduktion	Gradient: 0,3086mGal/m	
b) Bouguer-Reduktion	Gradient: 0,1967mGal/m	
c) Poincaré-Prey-Reduktion	Gradient:0,0848mGal/m	liefert realistische Werte IN der Masse; keine Randwerte

topographische Reduktion berücksichtigt Massenüberschüsse und Massendefizite über/unter dem Aufpunkt. Berechnung der Attraktionswirkung dieser Massen erfolgt unter Nutzung von Geländemodellen, wobei eine Rastereinteilung vorgenommen wird. Es wird die Gesamtattraktion A_x, A_y, A_z in Richtung x, y und z eines in den Aufpunkt gelegten Koordinatensystems errechnet.

Die Attraktionswirkung in x- und y-Richtung steht mit den Lotabweichungen im Zusammenhang. Die Attraktion in z-Richtung entspricht einer Korrektur der Gravimeterablesung.

Modernste Methode zur Berechnung der topographischen Reduktion: Fast-Fourier-Transformation.

Die Massenverlagerungen bewirken Änderung des Potentials (= indirekter Effekt) und damit Änderung der Lage des Geoids. Indirekter Effekt beeinflusst auch gravimetrische Lotabweichungen.

Um indirekten Effekt zu umgehen: Inversionsverfahren von Rudzky. Allerdings sehr aufwendig und daher nicht sehr gebräuchlich. Bei diesem Verfahren werden die äußeren Massen in das Innere des Geoids verlagert, wobei folgende Voraussetzungen beachtet werden:

- Spiegelung erfolgt am Geoid nach inversen Radien
- das Potential im Aufpunkt soll unverändert bleiben

Ergebnis: Erdmasse ändert sich leicht, nicht aber das Potential in A

Bildet man Differenz zwischen einem der 3 obigen Verfahren reduzierten Schwerewert und dem theoretischen Schwerewert am Niveauellipsoid (errechnet aus Formel von Somigliana), spricht man von Freiluftanomalien, Bougueranomalien oder Rudzky-Anomalien. Wird auch noch Effekt der Isostasie berücksichtigt: z.B.: topographisch-isostatisch korrigierte Bougueranomalie. Diese werden für Berechnung von Geoidmodellen in Ö genutzt.
Größenordnung der Bougueranomalien: -180mGal in den Alpen

Setzt man die Freiluft- oder Bougueranomalien in die Formel von Stokes ein (um N zu berechnen), so ist die Fläche das Co-Geoid (compensated geoid). Dessen Undulationen N^c lassen sich in echte Undulationen überführen.

Der indirekte Effekt der Bougueranomalien ohne Isostasie ist sehr groß – mehrere 100m. Isostatisch reduzierte Anomalien haben einen indirekten Effekt von nur mehr 10m. Sie müssen vor der Anwendung in der Stokes-Formel noch vom Geoid auf das Co-Geoid reduziert werden.
Bougueranomalien sind in den Gebirgen stark negativ (-180mGal), auf den tiefen Weltmeeren stark positiv. Das ist Folge der Nicht-Beachtung der Isostasie.
Δg ist die Folge eines Massendefizits oder eines –überschusses zwischen der Oberfläche und dem Geoid.

Upward continuation: Oberflächenschwerewert auf beliebiges Potentialniveau reduzieren und dann die theoretische Schwere in diesem Niveau berechnen.

9.2. Isostatische Reduktion

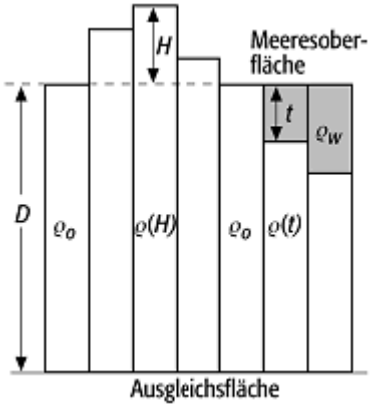
2 lokale Theorien: Aufblähungstheorie von Pratt-Hayford
Schwimmtheorie von Airy-Heiskanen

1 regionale Theorie: regionale Isostasie nach Vening-Meinesz

1. Pratt-Hayford
In etwa 100km Tiefe (=Ausgleichstiefe) herrscht hydrostatisches Gleichgewicht, also gleiche Dichte. Dazu müssen die verschieden hohen Massensäulen verschiedene Dichten haben, damit sie in der Ausgleichsfläche gleichen Druck ausüben. Die Dichte der Massensäulen ist umso geringer, je höher diese emporgehoben wurden.

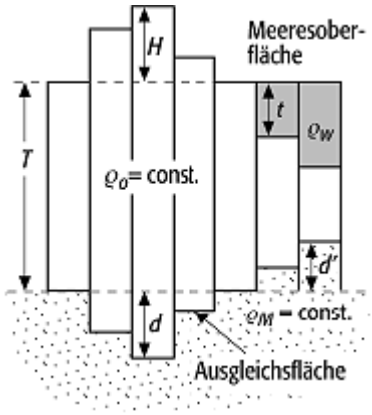
Gleichgewichtsbedingung:
$D\rho_0 = (D+H)\rho$

Deutungen:
Massengleichheit in den Säulen
ODER
Druckgleichheit



2. Airy-Heiskanen
Nach diesem Modell schwimmt die leichtere Erdkruste auf flüssiger Lava (Sima) und taucht umso tiefer in den darunter liegenden Erdmantel ein, je höher die topographischen Erhebungen sind. Für die Erdkruste und den Erdmantel werden konstante Dichten angenommen. Alle Massensäulen haben gleiche Dichte.
Das verdrängte Volumen bewirkt eine Auftriebskraft, die dafür sorgt, dass sich ein Schwimmgleichgewicht einstellt. Dabei gilt, dass der Betrag der Auftriebskraft gleich dem Betrag der Gewichtskraft ist. Massenüberschüsse der Topographie werden dadurch kompensiert, dass die leichtere Erdkruste, wie eine Wurzel, in den Erdmantel eintaucht. Das Massendefizit, das die Wurzeln bewirken, muss gleich dem Massenüberschuss der Topographie sein. Massendefizite der Ozeane werden dadurch kompensiert, dass die leichtere Erdkruste weniger tief in den Erdmantel einsinkt, es entstehen sogenannte Antiwurzeln des Erdmantels. Der Massenüberschuss, den die Antiwurzeln bewirken, muss gleich dem Massendefizit der Ozeane sein.

Schwimmgleichgewicht:
$\rho_0 H = d\rho_0 t$



10. Die Gezeiten

10.1. Die Gezeiten der festen Erde

Gezeitenkraft ist Resultierende aus Fliehkraft (Rotation der Erde um die Sonne) und Attraktion von Sonne oder Mond.
Gezeitenpotential besitzt keine Glieder nullten Grades, weil Fliehkraft für alle Punkte der Erde gleich groß ist, und keine ersten Grades, weil im Erdschwerpunkt Gleichgewicht herrscht und somit Gezeitenkraft =0.
Gezeitenpotential ist Kugelfunktionsentwicklung und hängt ab von: Erdradius, Distanz vom Geozentrum bis zum Schwerpunkt des gezeitenverursachenden Körpers, geozentrische Zenitdistanz des Aufpunktes auf der Erde, GM_H

Die totale Wirkung von Sonne und Mond folgt durch Addition, dabei verursacht der Mond 2/3 des Effekts, die Sonne 1/3. Im Gegensatz zur Horizontalkomponente der Gezeitenbeschleunigung, die nur eine minimale Änderung der Lotrichtung bewirkt (Mond: 0,021‘‘/Sonne:0,010‘‘), sind die Vertikalkomponenten unbedingt zu beachten.
Diese Komponenten werden u.a. mit den Elastizitätsfaktoren f_g und f_h berechnet, die den Unterschied zwischen einem starren und einem elastischen Erdmodell beschreiben. Sie berechnen sich als Linearkombinationen der Love und Shida-Zahlen k, h und l. Beide haben für Grad n=2 der Potentialentwicklung etwa den Wert 1,2.

Das Gezeitenpotential kann man in 3 Teile bzw. Tiden zerlegen: $V_{G,2} = V_{G,20} + V_{G,21} + V_{G,22}$

Die Tiden sind Produkte einer Ortsfunktion und einer Winkelfunktion und beschreiben Abweichungen des gezeitenverursachenden Körpers von einer gleichförmigen mittleren Kreisbahn in der Äquatorebene (Deklination=0).
$V_{G,22}$ besitzt halbtägige, $V_{G,21}$ tägliche und $V_{G,20}$ längere Perioden.

$V_{G,20}$, welches nur von der Deklination abhängt und unabhängig von der Länge ist, verursacht im Falle des Mondes „Gezeitenwellen“ mit monatlicher oder 14-tägiger Periode, im Fall der Sonne mit jährlicher oder halbjährlicher Periode.

$V_{G,21}$ ist für Präzession, Nutation und Teile der Polbewegung verantwortlich. Diese Tide besitzt exakt die Rotationsfrequenz der Erde und setzt sich aus einem Anteil der Sonne und des Mondes zusammen.

$V_{G,22}$ sind einfach an Gezeitenstationen zu messen und in der Polbewegung nachzuweisen. Sind für die säkulare Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit der Erde und Ebbe und Flut verantwortlich.

Erde ist ein Ellipsoid, weil 1) rotiert und daher abgeplattet wird 2) permanente Tiden „Zerrungen und Quetschungen“ ausführen

Love- und Shida-Zahlen
Die Attraktion von Sonne und Mond bewirkt eine Deformation der „elastischen“ Erde und damit eine Änderung des Gravitationspotentials (Massenpunkte ändern ihre Lage). Diese Änderung dV ist proportional zum angreifenden Gezeitenpotential:

$dV = kdV_G$ ..entspricht Hooke’schem Gesetz

k … Love-Zahl und dimensionslos
…vom Grad der Potentialentwicklung abhängig; da aber der Term 2.Grad so dominant ist wird meistens automatisch $k = k_2$
… hängt gering von der Frequenz ω_j der Gezeitenwelle j ab, wenn Körper einen flüssigen Kernanteil besitzt, so wie Erde
…für die Oberfläche der elastischen Erde beträgt $k_2 \approx 0{,}3$. Im starren Fall wäre k=0
…somit Maß der Elastizität eines Körpers
…für die Verlängerung der Periode der freien Polbewegung von 304 Tagen (Euler) auf 430 Tage (Chandler) verantwortlich. Chandler-Periode ist Periode des Fliehkraftstörpotentials, welches Variationen der Schwere im µgal-Bereich verursacht

Der vom Gezeitenpotential V_G verursachte Verschiebungsvektor eines Massenelements kann als Funktion des Potentials bzw. seiner Ableitungen dargestellt werden, darin kommen die Love- bzw. Shida-Zahlen l und h vor.
h und l sind Funktionen des Abstands vom Massenzentrum und repräsentieren die Verschiebungen des Massenelements in radialer (h) und horizontaler (l) Richtung.
k, h und l werden als Love-Zahlen bzw. l manchmal als Shida-Zahl bezeichnet

für starre Erde würde gelten: k=h=l=0
für flüssige Erde würde gelten: k=h=l=1
für aktuelle Erdfigur: $k \approx 0{,}3$ $h \approx 0{,}6$ $l \approx 0{,}08$

Durch das angreifende Gezeitenpotential verschiebt sich die Niveaufläche auf der visko-elastischen Erde und somit verändert sich auch das Potential proportional zu diesem angreifenden Potential.

Gezeiteneinfluss ~ 30cm

10.2. Gezeitenwirkung der Ozeane

Reaktion der Ozeane auf die Anziehung von Sonne und Mond ist stark von den lokalen und regionalen Gegebenheiten (Küstenform, Meerestiefe,…) abhängig. Sie kann deshalb nicht in einer geschlossenen analytischen Form angegeben, sondern nur durch Raster punktweise beschrieben werden.

12. Globale Schwerefeldmodelle

Geopotentialmodelle sind Kugelfunktionsentwicklungen des Gravitationspotentials der Erde bis Grad und Ordnung 360.Höhere Grade sind möglich, aber noch im Teststadium.
Bis Jahr 2000 wurden Modelle auf Basis der Beobachtungen von Satellitenbahnstörungen mittels SLR, GPS, Altimetermessungen und mittleren Freiluftanomalien berechnet.
Seit Start der tieffliegenden Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE werden Modelle mit Gradiometermessungen berechnet.

Anwendung der Geopotentialmodelle: Satellitenbahnprädiktion, Berechnung von Geoidundulationen/Lotabweichungen/Schwereanomalien, Untersuchung ozeanischer Strömungen

Genauigkeit der relativen Geoidinformation: wenige Dezimeter, da Modelle Auflösung von 30‘ (entspricht 50km auf Erdoberfläche) haben und daher hochfrequente Einflüsse der Topographie nicht beschrieben werden können.

In den frühen 90er-Jahren wurde JGM3 (Joint Gravity Model) von EGM96 (Earth Gravity Model) abgelöst.

12.1. Allgemeine Kugelfunktionsdarstellung

…des Gravitationspotentials der Erde:

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^{S} Y_{nm}(\theta,\lambda)\right]$$

…des Störpotentials (= Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem normalen Gravitationspotential der Erde)

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^{n} C_{nm}^{S} Y_{nm}(\theta,\lambda)$$

Term 0.Grades verschwindet, weil gleiche Masse für tatsächliche Erde und Niveauellipsoid angenommen wird.

12.2. Bestimmung der Geoidundulationen aus Geopotentialmodellen

Geoid = Äquipotentialfläche W_0 des tatsächlichen Erdschwerefelds und fällt bestmöglich mit der mittleren Meeresoberfläche zusammen.
Referenzfläche zur Beschreibung des Geoids ist das Niveauellipsoid mit dem Normalpotential U_0.

Geoidundulation= Strecke zwischen dem Punkt P_0 am Geoid und Q_0 am Ellipsoid.
Größenordnung: Bessel-Ellipsoid: -2,5m bis +3,5m
WGS84: ~50m
…hängt also von Lagerung des Ellipsoids ab

Geopotentielle Kote C_P = Differenz zwischen dem tatsächlichen Schwerepotential W_P im Oberflächenpunkt P und dem zugehörigen Potential W_0 am Geoid: $C_P = W_0 - W_P$

Telluroid: besteht aus jenen Punkten Q, für die die Potentialdifferenz zwischen Q und Q_0 gleich der tatsächlichen Potentialdifferenz (W_0-W_P) ist: $C_P = U_0 - U_P$

Höhenanomalie ζ: Strecke zwischen Telluroid Q und dem Oberflächenpunkt P.

Bestimmung der Geoidundulationen aus Höhenanomlien: $N = \zeta + \frac{\bar{g}-\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H$
$\bar{g}$…Mittelwert der tatsächlichen Schwere zwischen Geoid und Erdoberfläche
$\bar{\gamma}$…Mittelwert der Normalschwere zwischen Ellipsoid und Telluroid
H..Orthometrische Höhe
statt $\bar{g}$ - $\bar{\gamma}$ kann auch die Bougueranomalie Δg_B eingesetzt werden

12.3. EGM96
…ist Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials der Erde bis Grad und Ordnung 360

Bestimmung:
1) Kombinationslösung aus:
   a) reine Satellitenlösung EGM96S bis Grad und Ordnung 70 berechnet
   b) Normalgleichungen der direkten Altimetrie und der 1°x1° terrestrischen Schwereanomalien hinzufügen
2) vorläufige Lösung bis 360 aus der Satellitenlösung und den 30‘ mittleren Freiluftanomalien bestimmen
3) mit diesen Koeffizienten als apriori Werte dann blockdiagonale Lösung aus EGM96S und den 30‘ berechnen

Leitet man Störpotentialentwicklung 2x nach den kartesischen Koordinaten im erdfesten, geozentrischen System ab, so erhält man die Komponenten des Gradiententensors. Dieser ist symmetrisch und es dominieren die Diagonalkomponenten T_{xx}, T_{yy} und T_{zz}.

EGM96-Modell wurde ab 2003 von CHAMP und GRACE abgelöst. Wesentlicher Vorteil: es sind keine statischen Modelle mehr, sondern es kann die zeitliche Variation des Erdschwerefelds beobachtet werden (monatliche Modelle).

Es müssen auch noch die kleinräumigen Strukturen (Massenverteilung Berge/Täler, Dichteinhomogenitäten) berücksichtigt werden, welche mithilfe D-GPS-Höhenbestimmung und Nivellement gemessen werden können.

EGM2008 und EIGEN-5C (mit terrestrischen GPS-/Nivellementmessungen) sind die besten Modelle.

Mit EGM Undulation auf 36cm genau bestimmbar, mit JGM 63cm.

12.4. Genauigkeitsabschätzung für Österreich
Kennt man orthometrische Höhe eines Referenzpunktes und will die orthometrische Höhendifferenzen mit D-GPS in einem größeren Gebiet um diesen Referenzpunkt bestimmen, dann ist die genaue Kenntnis des Geoids unumgänglich.

Die Gebiete Ost und West werden in Kreisringe um zentrale Punkte Z der Untersuchungsgebiete unterteilt und anschließend werden für diese beiden Punkte die Geoidhöhen aus dem EGG97 und aus dem Geopotentialmodell OSU91A bestimmt. Das EGG97 wird dann als quasiwahres Referenzmodell verwendet.

Undulationsdifferenzen werden dann definiert:
ΔN_{global} beschreibt den Fehler in den Undulationen wenn man das genaue Geoid EGG97 durch das globale (OSU) annähert.
ΔN_{total} beschreibt den Fehler, der entsteht wenn keine Geoidinformation verwendet wird, d.h. wenn für alle Neupunkte die Geoidhöhe des Referenzpunktes genommen wird.
Man berechnet dann die Standardabweichungen der Undulationsdifferenzen in den einzelnen Kreisringen um die Referenzpunkte und erhält als Ergebnis, dass die Genauigkeit für die Differenz zweier Geoidhöhen durch Verwendung von ΔN_{global} höher ist als bei ΔN_{total}.

12.5. Ebene Approximation
…damit detailierte Geoidstudie durchgeführt werden kann.

Globale Schwerefeldparameter werden noch den lokalen Schweredaten abgezogen
Vereinfachungen:

Kugel, als Basis der Entwicklung nach Stokes, wird durch ihre Tangentialebene ersetzt
Schrägdistanz wird durch ebene Distanz ersetzt

Mittels ebener Approximation können Undulationen und Lotabweichungen statt mit Schwereanomalien, mit Höheninformationen aus einem Geländemodell berechnet werden. Vorteil: Geländemodelle sind billiger und leichter zugänglich als Schwereanomalien. Nachteil: Approximation kann nur bei ebenem Gelände durchgeführt werden.

13. Das Problem von Molodensky

Bisher: alle geodätischen Messungen von der Erdoberfläche auf das Geoid reduziert und geodätisches Randwertproblem mithilfe der Formel von Stokes gelöst. Vorteil: Geoid ist Niveaufläche und ist daher physikalisch definiert. Nachteil: Geoid verläuft auf den Kontinenten in der Masse und ist dort von der Dichte abhängig. Es müsste also Dichte in allen Punkten zwischen Oberfläche und Geoid bekannt sein.

Molodensky: zeigt, dass die Oberfläche selbst bestimmt werden kann und Geoid nicht notwendig ist. Schwereanomalien und Lotabweichungen beziehen sich hierbei auf die Erdoberfläche.

früher:	$H_E = h + N$	ellip.Höhe = orthometrische Höhe + Undulation
Molodensky:	$H_E = H^* + \zeta$	ellip.Höhe = Normalhöhe + Höhenanomalie

Zur Bestimmung von H* und ζ wird in der Ellipsoidnormalen ein Punkt Q gesucht, dessen Potential im theoretischen Schwerefeld des Ellipsoids U_Q gleich dem Potential des Punktes P im wirklichen Feld ist, also: $U_Q = W_P$ (= Bestimmung des Telluroids)

W_P erhält man durch Nivellement + Gravimetrie-Messungen: $W_P = W_0 - \int_0^P g dh$

W0 wird gleich dem Potential des Niveauellipsoids U_0 gesetzt, also ergibt sich:
$U_0 - U_Q = \int_0^P g dh = C_P$ …somit ist die Lage von Q bestimmt

wichtig: $W_P \neq U_P$

Um der geopotentiellen Kote CP eine Dimension der Länge zu geben, dividiert Molodensky durch den Mittelwert der theoretischen Schwere zwischen Ellipsoid und Q: $H^* = \frac{U_0 - U_Q}{\bar{\gamma}} = \frac{C_P}{\bar{\gamma}}$
Die Gesamtheit aller Punkte Q ergibt das Telluroid.

$\zeta = H_{E,P} - H_P^* = H_{E,P} - H_{E,Q}$

Höhenanomalie = ellipsoidische Höhe von P – ellipsoidische Höhe von Q

Schwereanomalie nach Molodensky: $\Delta g = g_P - \gamma_Q$ gemessene Schwerebeschleunigung – theoretische

Weder in H* noch in die Schwereanomalie geht die Dichte ein!!
Analog zu Theorem von Bruns: $\zeta = \frac{T}{\gamma}$ T…Störpotential im Oberflächenpunkt

Telluroid ist keine Niveaufläche. Wählt man die Oberflächenpunkte P sehr eng, wird das Telluroid zu einer Parallelfläche der Erdoberfläche und kann daher sehr unruhig sein. Die Höhe von P wird durch eine Länge charakterisiert, die nicht in P endet, deshalb hat Molodensky ζ vom Ellipsoid aus aufgetragen und erhält dadurch das „Quasigeoid". Quasigeoid hat keine physikalische Bedeutung. Auf den Meeren fällt es mit Geoid zusammen, auf den Kontinenten verläuft es nahe dem Geoid.
Kritik: Molodenksy verwirft Geoid, erhält dadurch aber wesentlich kompliziertere Theorie.

Randwertproblem der physikalischen Geodäsie nach Molodensky:
$F(S, W, \frac{dW}{dn}) = 0$
…hängt also ab von: Erdoberfläche, Schwerepotential, Ableitung des Schwerepotentials nach der Normalen auf die physische Erdoberfläche (=entspricht Schwere der Erde)

Das Problem ist, sie nach S aufzulösen. Es handelt sich um nichtlineare Integralgleichung. Man kann sie durch Einführung von Näherungswerten linearisieren und bekommt somit die Abweichung der strengen von der genäherten Lösung.
Näherungen für:

W	→	Normalpotential U
S	→	Telluroid

Abweichung W von U ist Störpotential T: T= W-U
Abweichung S von Telluroid ist Höhenanomalie

Ziel von Bruns und Stokes:	Geoid bestimmen
Ziel von Molodensky:	Erdoberfläche bestimmen

14. Bestimmung der Koeffizienten der harmonischen Entwicklung des Störpotentials aus Satellitenbahnstörungen

14.1. Die Lagrange'schen Störungsgleichungen
Bewegungsgleichung eines Erdsatelliten:
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ …im Inertialsystem

$\vec{F}$ summiert direkte Anziehung von Sonne und Mond, Gezeitenkräfte, Kräfte durch den inhomogenen Aufbau der Erde
Weitere nichtgravitative Kräfte wären: Strahlungsdruck der Sonne, Abbremsung durch die Atmosphäre

Die auf den Satelliten wirkenden Störbeschleunigungen stammen von der Summe der Beschleunigungen individueller Massenelemente und können als Gradienten der Funktion T aufgefasst werden: $\sum d\vec{F} = gradT$

Ein Satz von Anfangswerten (Orts- und Geschwindigkeitsvektor) kann in einen Satz von oskulierenden Bahnelementen umgerechnet werden. Im Fall von Störkräften ändern sich diese mit der Zeit.

Durch Integrieren der Bewegungsgleichung, ausgedrückt in oskulierenden Bahnelementen, liefert die Lagrange'schen Störungsgleichungen. In jeder dieser 6 Gleichungen steckt die Ableitung des Störpotentials nach dem jeweiligen Keplerelement, also muss zur Lösung der Lagrange'schen Störungsgleichungen das Störpotential in Funktion der Bahnelemente ausgedrückt werden (Theorie von Kaula).
Lagrange'schen Störungsgleichungen verbinden also die Änderung der Bahnelemente mit der Zeit, mit dem Störpotential.
Allerdings werden „Spezialbahnen", also Kreisbahnen oder Bahnen in der Äquatorebene damit nicht abgedeckt, dafür muss auf andere Darstellungen (z.B.: Hill-Variablen) zurückgegriffen werden.
Sollen die Änderungen der Bahnelemente in Funktion der Störkräfte entlang der Achsen eines lokalen kartesischen Koordinatensystems dargestellt werden, spricht man von Gauß-Gleichungen. Darin enthalten sind eine radiale Kraftkomponente (R), eine normal zur Bahnebene (W) und eine in Richtung der Bahnbewegung (S).

Setzt man den nichtperiodischen Anteil des Störpotentials in die Lagrange'schen Gleichungen für die Länge des aufsteigenden Knotens, des Perigäums und der mittleren Anomalie ein, wachsen die Störungen in diesen Bahnelementen immer mehr an, da keine periodischen Terme enthalten sind. Sie können deshalb einfach beobachtet und C_2 (hängt mit Abplattung zusammen) damit gut bestimmt werden. Diese 3 Gleichungen beinhalten nur den Koeffizienten C_2, i, e, a und n (=mittlere Satellitenbewegung).

- $\frac{dM}{dt}$ zeigt: C_2 verändert die Umlaufzeit des Satelliten: die Bewegung ist langsamer für Neigungen i zwischen 54,7 und 125,3 Grad und schneller im Restbereich.
- $\frac{d\Omega}{dt}$ repräsentiert die Drehung der Bahnebene. Die Funktion erreicht ein Maximum für kleine Bahnneigungen, während Polbahnen nicht beeinträchtigt werden. Die Rotation des Knotens ist rückläufig für Bahnneigungen <90° und prograd >90°
- $\frac{d\omega}{dt}$ beschreibt die Bewegung des Perigäums. Für Bahnen mit einer Neigung zwischen 63,4 und 116,6° gibt es eine rückläufige Rotation und es gilt $\frac{d\omega}{dt} = 0$ „kritische Neigung"

Die periodischen Terme des Störpotentials liefern Störungen mit Perioden in der Größenordnung der Umlaufzeit des Satelliten (=kurzperiodische Störungen).

Zur Bestimmung der übrigen zonalen Koeffizienten werden die Störungen der Elemente in Funktion der C_n dargestellt und über eine endliche Zeitspanne integriert. Aus Beobachtungen von vielen Satelliten in unterschiedlichen Bahnen werden zuerst die Störungen in den Elementen bestimmt un dann die C_n berechnet.

a) Die zonalen Koeffizienten (m=0) des Störpotentials mit gerader Gradzahl n verursachen säkulare Störungen in den Bahnelementen Ω, ω und M, sowie langperiodische Störungen in allen Elementen außer Halbachse a.

b) Die zonalen Koeffizienten mit ungerader Gradzahl verursachen langperiodische Störungen in allen Elementen außer a.

c) Alle zonalen Koeffizienten verursachen kurzperiodische Störungen

d) Die geraden Koeffizienten werden aus den säkularen Störungen in Ω und ω bestimmt, die ungeraden aus den langperiodischen Störungen in e und i.

e) Die tesseralen Koeffizienten (m≠0) verursachen kurzperiodische Störungen mit von der Ordnung abhängigen Perioden. Ihr Einfluss auf die Änderung der Bahnelemente ist gering.

14.2. Die Theorie von Kaula

…durch Beobachtung der Bahnelemente ist es möglich, auf alle C_{nm} und S_{nm} zu schließen.

Kaula entwickelte das Gravitationspotential der Erde in eine trigonometrische Reihe, deren Argumente die mittlere Anomalie M, die Länge des aufsteigenden Knotens Ω, das Argument des Perigäums ω und die Sternzeit Θ sind. Dabei werden φ und λ durch i, Ω, ω und ν ersetzt.
Das Störpotential T lässt sich auch als Reihenentwicklung, in Abhängigkeit von ψ (enthält die oben genannten Argumente) darstellen:

$$T_{nm} = -\frac{GM}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{p=0}^{n} F_{nmp}(i) S_{nmp}$$

S_{nmp} sind Produkte der Geopotentialkoeffizienten S_{nm} und C_{nm}.
$F_{nmp}(i)$ ist die Bahnneigungsfunktion

Im zweiten Schritt werden r und ν durch a, e und M ersetzt:

$$T_{nm} = -\frac{GM}{a}\left(\frac{a_e}{a}\right)^n \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{nmp}(i) G_{npq}(e) S_{nmp}$$

G_{npq} ist Exzentrizitätsfunktion und geht bei steigender Ordnung q schnell gegen 0

Die Terme T_{nm} werden in die Lagrange'schen Störungsgleichungen eingesetzt, über einen endlichen Zeitraum integriert und man erhält die Änderung der Bahnelemente aufgrund der Wirkung eines nmpq-Terms des Störpotentials.
Offensichtlich werden die Schwankungen in den Bahnelementen durch die zeitliche Änderung des Winkelarguments ψ gesteuert.

14.3. Resonanzen

Treten auf, wenn die Erdrotationsdauer ein ganzzahliges Vielfaches der Umlaufzeit des Satelliten ist. Resonanz verursacht „Schwingung" der Bahnneigung. Halbachse a zeigt aufgrund der Resonanz ein quasi-säkulares Störungsverhalten, dies wird speziell bei GPS-Satelliten deutlich. Änderung der Halbachse ist also auf tesserale Geopotentialkoeffizienten zurückzuführen. Die Umlaufzeiten von Satelliten werden auch absichtlich mit Resonanzeffekt gewählt, um tesserale Potentialkoeffizienten mit hoher Genauigkeit ableiten zu können.

Resonanzkoeffizienten lassen sich aus Abweichungen der Satellitenbahn bestimmen. Im Resonanzfall wird Änderung von ψ=0.

Der Satellit kreuzt βx den aufsteigenden Knoten, während sich die Erde αx relativ zur Bahnebene des Satelliten dreht.
Geostationäre Bahn hat Resonanzverhältnis von 1:1
GPS-Satellit: α:β= 1:2 → während sich die Erde 1x dreht, dreht sich Satellit 2x um die Erde
Je tiefer die Satelliten: 1:14, 1:16,…

15. Satellitengradiometrie

15.1. Prinzip des Gradiometers

Mithilfe eines Gradiometers lassen sich die Komponenten des Eötvös-Tensors oder Linearkombinationen der Komponenten bestimmen. Der Tensor beinhaltet die 2.Ableitungen des Schwerepotentials. Weil das Schwerefeld wirbelfrei ist und die Laplace-Gleichung gilt enthält der Schweregradiententensor 5 unabhängige Elemente. Der Tensor ist symmetrisch.
W_{zx}, W_{zy} und W_{zz} sind die Horizontal- und Vertikalableitungen der Schwerebeschleunigung.

$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 0$ (Laplace-Bedingung)
$W_{xy} = W_{yx}$ $W_{yz}=W_{zy}$ $W_{xz}=W_{zx}$

In einem Gradiometer werden die Bewegungen von zwei oder mehreren Testmassen gemessen. Der Ursprung des lokalen Koordinatensystems kommt in den Massenmittelpunkt C des Instruments. Die Schweredifferenz wird in Form von geringen Ausschlägen oder Rotationen gemessen. Diese Ausschläge werden optisch oder elektronisch registriert.

In einem translativen System werden 2 Beschleunigungsmesser als Sensoren verwendet. Die Differenz der Ablesungen zweier Beschleunigungsmesser in eine Raumrichtung, dividiert durch ihren Abstand, entspricht der Messung einer Komponente des Gravitationstensors:
$W_{zz} = \frac{f_2 - f_1}{\Delta z}$

Die Diagonalelemente werden aus einer longitudinalen und die anderen Elemente aus einer transversalen Konfiguration der Beschleunigungsmesser gewonnen.

In einer Höhe von 200km müssen die Beschleunigungsmessungen bei einer gewünschten Genauigkeit von 0,001E auf +/- 10^{-13}g genau erfolgen.

Bei einem supraleitenden Gradiometer gibt es 3 Paare von Gradiometern. Das Gerät muss permanent gekühlt werden. Die Auslenkung der Testmassen wird sofort durch Magnetfeld kompensiert und es wird die Kraft gemessen, die zur Rückstellung notwendig ist.

15.2. Gradiometrie auf bewegten Plattformen

Gradiometrie auf bewegten Plattformen (Landfahrzeug, Flugzeug, Satellit) ermöglicht lokale, regionale und globale Bestimmung des Erdschwerefelds (auch an nicht zugänglichen Orten) in kurzer Zeit. Satellitengradiometrie kann auch zur Vermessung anderer Himmelskörper verwendet werden. Durch zeitliche Mittelbildung und Messungen in größeren Höhen können die kurzperiodischen Störungen durch die Topographie unterdrückt werden.
Wenn der gesamte Tensor entlang eines Profils verfügbar ist, ergibt sich die Gravitationsbeschleunigung in einem Punkt P durch Integration entlang des Weges P0P zu:

$$gradW = \vec{b} = \overrightarrow{b_0} + \int_{t_0}^{t} W_{ij}\dot{\vec{r}}$$

$\overrightarrow{b_0}$ … Beschleunigung im Anfangspunkt P0 zum Zeitpunkt t0. Der Messweg $\vec{r}$ muss in Funktion der Zeit bekannt sein, sodass dr/dt berechnet werden kann. Die Anforderung an die Positionierungsgenauigkeit steigt mit der Anforderung an die Genauigkeit der Gradiometrie.

Durch die Bewegung des Messsystems treten Fahrzeugbeschleunigungen und Rotationen auf. Es wird daher eine Rotationsmatrix verwendet, um das lokale System in das inertiale System zu transformieren. Zusätzlich treten Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung auf. Durch Differenzbildung werden nicht-gravitative Beschleunigungen eliminiert.

Der vollständige Tensor kann nur aus Beschleunigungsdifferenzen in 3 zueinander normal stehenden Raumrichtungen abgeleitet werden, also 2 Beschleunigungssensoren pro Achse.

16. Aktuelle Schwerefeldmissionen

16.1. CHAMP

2010 nach 10 Jahren eingestellt
Höhe: 454km
Geopotential bis n≈90
Satellite to Satellite Tracking (SST)
nahezu kreisförmige Umlaufbahn
i= 87°
Beschleunigungssensor ist im Schwerpunkt des Satelliten positioniert und dient zur Messung der nicht-gravitativen Störbeschleunigungen

16.2. GRACE

Seit 2002 in Betrieb
Höhe: 485km
Bestimmung des Schwerefelds und dessen zeitliche Änderung in Form von Kugelfunktionskoeffizienten des Geopotentials bis Grad und Ordnung n=m≈180
SST, Messgröße also Distanz zwischen 2 Satelliten
nahezu kreisförmige Umlaufbahn
i=96°
die beiden Satelliten haben einen räumlichen Abstand von ca.200km
Auflösung der Distanzänderung auf +/- 1µm/s mittels Mikrowelle

16.3. GOCE

Seit 2009 in Betrieb
Höhe: 250km
Bestimmung des Schwerefelds und dessen zeitliche Änderung in Form von Kugelfunktionskoeffizienten des Geopotentials bis Grad und Ordnung n=m≈250
Ozean-Strömungsmodelle
Messgröße: V_{ij} mit einer Genauigkeit von 0,001E
nahezu kreisförmige Umlaufbahn
i=96,5°
sonnensynchron
umrundet Erde 16x pro Tag

Zusätzlich verwendete Unterlagen: Internet
Skript „Physikalische Geodäsie“