1. (10 Punkte)

✓ 1.1) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar? **Begründung!**
Geben Sie die Matrizen X und D in der Darstellung $A = XDX^{-1}$ an.
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A und den Rang von A.

✓ 1.2) Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen J einer 3×3-Matrix B mit dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = (\lambda + 3)^3$.

2. (10 Punkte)

✓ 2.1) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ c(c+1)x_2 + 2cx_3 &= 3c + 1 \\ 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Berechnen Sie für alle Werte von c den Rang der Koeffizientenmatrix und den Rang der erweiterten Matrix. Für welche Werte von c gibt es eine eindeutige Lösung, keine Lösung oder unendliche viele Lösungen? **Begründung!**
Lösen Sie das Gleichungssystem für die Werte von c, wo Lösungen existieren.

✓ 2.2) Berechnen Sie die Ableitung $G'(x)$ des Parameterintegrals auf zwei Arten (zuerst Integrieren, dann Differenzieren bzw. umgekehrt):

$$G(x) = \int_2^{3x} (\ln x + y)\, dy$$

3. (10 Punkte)

✓ 3.1) Gegeben sei die Differentialgleichung $x'' - 4x = \sin(2t)$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser inhomogenen Differentialgleichung. Führen Sie die entsprechenden Berechnungen auch für $x'' - 4x = e^{2t}$ durch.

✓ 3.2) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $x' = (x+1)\sin t$ mit $x(\frac{\pi}{2}) = 4$.

4. (10 Punkte)

4.1) Ist die Gleichung $f(x,y) = xe^{2(x-y)} = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(1,1)$ nach y auflösbar? Begründung! Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $y = y(x)$, werten Sie diese an der Stelle $x = 1$ aus und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $(1,1)$.

✓ 4.2) Gegeben sind die Funktionen $f(x,y) = x^2 + (y-4)^2$ und $\varphi(x,y) = x^2 - y^2 - 12$. Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

✓ (2 zusätzliche Punkte) Berechnen Sie, ob es sich bei den stationären Punkten um Maxima oder Minima handelt.